

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

23. Band, Heft 3

19. Oktober 1940

S. 97—144

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● Carnap, Rudolf: Foundations of logic and mathematics. (Internat. encyclopedia of unif. sci. Vol. 1, Nr. 3.) Chicago: Univ. of Chicago press 1939. VIII, 91 pag.

Sobociński, Bolesław: Axiomatisierung des „konjunktiv-negativen“ Systems des Aussagenkalküls. Collectanea Logica, Warszawa 1, 179—193 (1939) [Polnisch].

Nachdem ich die im 1. Bande dieser Collectanea veröffentlichten Arbeiten von J. Łukasiewicz und I. M. Bocheński habe anzeigen können (dies. Zbl. 22, 289), ist es mir gelungen, auch von den übrigen Beiträgen zu diesem Bande die Sonderabzüge zu erhalten, um die ich mich bemüht habe: zwei kleinere Arbeiten von B. Sobociński und zwei größere Abhandlungen von St. Leśniewski. Von den Beiträgen von Sobociński habe ich je zwei Abzüge erhalten, die der Bibliothek des Logistischen Seminars der Universität Münster i. W. überwiesen worden sind. Die Abhandlungen von Leśniewski habe ich vorläufig nur für diese Besprechung als Leihgabe erhalten können.

Es seien „C“, „N“, „K“, „A“ in dieser Folge Symbole für „wenn-so“, „es-ist-nicht-wahr-daß“, „und“, „oder“ im nicht-ausschließenden Sinne von „vel“. \mathfrak{A} sei der quantifikatorenfreie klassische zweiwertige Aussagenkalkül („AK“). \mathfrak{A} kann mit Hilfe von „C“ und „N“, „K“ und „N“, „A“ und „N“ konstruiert werden. Frege und J. Łukasiewicz haben sich für „C“ und „N“, die Verff. der Principia Mathematica und Hilbert-Ackermann für „A“ und „N“ entschieden. In der vorliegenden Arbeit ist \mathfrak{A} zum erstenmal mit Hilfe von „K“ und „N“ konstruiert worden, also als eine Folge von Sätzen, die (nach Unterdrückung beliebiger Vielfacher von „NN“) mit „NK“ beginnen, mit „K“ dann und nur dann, wenn sie Konjunktionen von Ausdrücken in „K“ und „N“ mit Satzcharakter sind. — Dieser KN-Kalkül fußt auf 4 Axiomen, die in der klammerfreien Symbolik von J. Łukasiewicz so angeschrieben sind: 1. $NKNpKpq$, 2. $NKNpKqKrp$, 3. $NKNKNprKNKNqrKNKpqr$, 4. $NKNKqpNNKpNNq$. 1., 2., 4. sind unmittelbar evident, 3. wird durch matrizenlogische Ausrechnung bestätigt. — Umformungsregeln sind (1) die Einsetzungsregel, (2) die folgende Abtrennungsregel: Wenn „ $NK\alpha N\beta$ “ ein Satz ist, wo α und β sinnvolle Ausdrücke in „K“ und „N“ sein sollen, und wenn α ein Satz ist, so ist auch β ein Satz („ $NK\alpha\beta$ “ an Stelle von „ $NK\alpha N\beta$ “ mit der Abtrennbarkeit von „ $N\beta$ “ unter der Voraussetzung, daß α ein Satz ist, ist zu schwach). Die Axiome gelten als Sätze. — Zunächst wird die Vollständigkeit von \mathfrak{A} bewiesen, in dem Sinne, daß gezeigt wird, daß die Erfüllungsmenge der klassischen zweiwertigen Matrix für „K“ und „N“ in der Menge der Folgerungen aus 1. bis 4. enthalten ist (die Umkehrung ist trivial). Der Beweis ist so angelegt, daß nur von strukturellen Betrachtungen Gebrauch gemacht wird. Es wird mit Hilfe dieser Betrachtungen gezeigt, daß jeder Ausdruck, der die Matrix erfüllt, eine Folgerung ist aus 25 von den 94 Sätzen, die für diese Reduktion aus den Axiomen abgeleitet sind. — Sodann wird die Unabhängigkeit des Axiomensystems mit Hilfe der Matrizenmethode durch eine 4-wertige Matrix für 1., durch je eine 5-wertige Matrix für 2. und 3., durch eine 3-wertige Matrix für 4. bewiesen. Die Unabhängigkeit von 4. kann auch leicht mit Hilfe der strukturellen Methode eingesehen werden, indem man sich davon überzeugt, daß 4. aus 1. bis 3. nicht durch Abtrennung erhalten werden kann. — Die vorstehend angezeigte Arbeit ist von einem doppelten sachlichen Interesse: (1) „K“ und „N“ sind die einzigen aussagenlogischen Funktoren, zu denen es in den natürlichen Sprachen vollwertige Äquivalente gibt. (2) K. Gödel hat [Erg. math. Kolloqu. 4, 34 f. (1933), dies Zbl. 7, 193] gezeigt, daß jeder Satz des klassischen AK im intuitionistischen AK erhalten bleibt, wenn er auf „K“ und „N“ reduziert wird. Das vorliegende System ist also das erste, durch das zugleich die klas-

sische und die intuitionistische Aussagenlogik formalisiert ist. Dies ist gesagt mit dem Vorbehalt, daß es für einen so genannten *AK* von der Heytingschen Mächtigkeit überhaupt eine im Sinne der Semantik präzisierte intuitionistische Deutung gibt von dem Genauigkeitsgrade, der, an diesem Maßstab gemessen, für die klassische Interpretation erreicht werden kann. Es scheint mir, daß wir hiervon noch weit entfernt sind. — Die vorliegende Axiomatisierung des *KN*-Kalküls stammt aus dem Jahre 1937. Sie ist angeregt worden durch die Herren A. Lindenbaum und A. Tarski, die im Zusammenhang mit Untersuchungen zur Theorie der Booleschen Körper auf dieses Desiderat gestoßen sind.

Heinrich Scholz (Münster i. W.).

Leśniewski, Stanisław: Einleitende Bemerkungen zur Fortsetzung meiner Mitteilung unter dem Titel „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik“. *Collectanea Logica*, Warszawa 1, 1—60 (1939) [Polnisch].

St. Leśniewski (1886—1939) hat vor 20 Jahren zusammen mit J. Łukasiewicz die unmittelbar an Frege anknüpfende Warschauer Schule für mathematische Logik und Grundlagenforschung hervorgerufen. Das System der Grundlagen der Mathematik, das von ihm erdacht worden ist, besteht aus drei Hauptstücken. Das erste Hauptstück ist ein System, das den klassischen Aussagenkalkül („*AK*“) umfaßt, aber durch zwei wesentliche Komplemente über ihn hinausragt: a) durch die Einführung von variablen Funktoren „*f*“, deren Argumente auf Aussagenvariablen beschränkt sind, b) durch die Einführung des Generalisators für die Aussagenvariablen und für die variablen Funktoren, mit der zusätzlichen Bestimmung, daß als Sätze nur solche Ausdrücke anerkannt werden, in denen keine Aussagen- oder Funktorenvariable frei vorkommt. Auf die von den bekannten Symbolisierungsmethoden stark abweichende Symbolik kann hier nicht eingegangen werden. In Anknüpfung an die für das voranstehende Referat verwendete Symbolik, die auch für diese Anzeige verbindlich sein soll, deuten wir „Für jedes *p*: für jedes *f*: *f*(*p*)“ an durch „*ΠpΠf*(*p*)“. L. nennt dieses System „Protothetik“. — Das zweite Hauptstück ist eine „Ontologie“: ein neuer Klassenkalkül über „*ε*“ [vgl. *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, cl. III 23, 111—132 (1930)]. — Das dritte Hauptstück ist eine „Mereologie“: eine durch ihre intuitionistischen Evidenzforderungen („intuitionistisch“ im üblichen, nicht im Brouwerschen Sinne des Wortes) scharf gegen E. Zermelo und J. v. Neumann gerichtete Grundlegung der allgemeinen Mengenlehre [vgl. A. Church, *A bibliography of symbolic logic*. *J. Symbolic Logic* 1, Nr 202. 8 (1936)]. Das erste Stück der Protothetik („*L1929*“) ist in den *Fundam. Math.* 14, 1—81 (1929) erschienen. Mit den hier anzuzeigenden Stücken ist eine zweite historisch-genetische Einleitung und das erste Hauptstück der eigentlichen Protothetik hinzugekommen. Zur allgemeinen Orientierung ist folgendes vorauszuschicken. Man hat sich daran gewöhnt, für Systeme des klassischen *AK* zu sagen, daß man für die Formalisierung eines solchen Systems mit einem einzigen Funktor, nämlich mit dem Shefferschen Strichfunktork [Trans. Amer. Math. Soc. 14, 481—488 (1913)] auskommt. L. hat bemerkt, daß diese Redeweise in der Verwendung, in der sie üblich geworden ist, ungenau ist; denn es ist nicht präzisiert, was es heißt, daß die übrigen Funktoren des *AK* mit Hilfe dieses Funktors definiert werden können, und das irgendwie, z. B. durch „=*df*“ angedeutete Zeichen der Definitionsgleichheit schwebt in der Luft. In dem über „*E*“ („dann und nur dann, wenn“) und „*Π*“ („für jedes“) und den beiden angegebenen Variablenmengen konstruierten System der Protothetik ist diese Ungenauigkeit zum Verschwinden gebracht. In diesem System können die üblichen Funktoren mit Hilfe von „*E*“ und „*Π*“ effektiv so eingeführt werden, daß man ohne ein Zeichen der Definitionsgleichheit auskommt, dessen Gebrauch nicht formalisiert, sondern dem mathematischen Instinkt überlassen ist. Wie „*N*“ auf dieser Basis definiert werden kann, hat schon B. Russell [*Amer. J. Math.* 28, 159—202, 7. 23 (1906)] gezeigt, nämlich durch „*ΠpENpEpΠqq*“. Hiervon überzeugt man sich unmittelbar mit Hilfe der von J. Łukasiewicz (*Elementy logiki matematycznej*. Skrypt antoryzowani. Warszawa 1929, 155 ff.) angegebenen Bewertungs-

methode, die diesen Ausdruck in bezug auf „ p “ überführt in „ $KENOEO\prod qqEN1E1\prod qq$ “, sodann in bezug auf „ q “ in „ $KENOEOK01EN1E1K01$ “. Dieser Ausdruck nimmt den ausgezeichneten Wert 1 an, da $ENOEOK01$ und $EN1E1K01$ diesen Wert annehmen. Es ist aber noch „ K “ zu definieren. In einer seiner ersten Arbeiten hat A. Tarski [Fundam. Math. 4, 196—200, Th. 11 (1923)] gezeigt, daß dies gelingt mit Hilfe von $T = „\prod p\prod qEKpq\prod jEpEj(p)f(q)“$ für jedes System des AK, in welchem die Extensionalitätsformel „ $\prod p\prod q\prod jCKEpqf(p)f(q)$ “ beweisbar ist. Durch Anwendung der angegebenen Bewertungsmethode führt man T zunächst über in

$$T_0 = KKKH_1H_2H_3H_4, \text{ wo } H_1 = EK00\prod jEOEj(0)f(0), \quad H_2 = EK01\prod jEOEj(0)f(1), \\ H_3 = EK10\prod jE1Ej(1)f(0), \quad H_4 = EK11\prod jE1Ej(1)f(1).$$

Durch eine evidente Verallgemeinerung derselben Methode führt man T_0 über in

$$T_{00} = KKKH'_1H'_2H'_3H'_4, \text{ wo } H'_1 = EK00KEOE00EOE11, \\ H'_2 = EK01KKKEOE00EOE01EOE10EOE11,$$

$$H'_3 = EK10KKKE1EO0E1E10E1EOE1E11, \quad H'_4 = EK11KE1EO0E1E11.$$

Mit H'_1, H'_2, H'_3, H'_4 nimmt auch T_{00} den ausgezeichneten Wert 1 an. Über den Inhalt der beiden hier anzuzeigenden Arbeiten kann jetzt wenigstens Folgendes gesagt werden: I. Die „Einleitenden Bemerkungen“ bestehen aus einem Referat von L1929(1—16) und 7 ergänzenden Bemerkungen (16—58). Aus diesen sollen hier wenigstens zwei Mitteilungen von allgemeinem Interesse hervorgehoben werden: a) Auch in der revidierten Formalisierung der Hilbertschen Beweistheorie durch v. Neumann [Fundam. Math. 17, 331—334 (1931)] sind noch Direktiven enthalten, welche die Ableitung eines Widerspruchs in diesem System ermöglichen (43—56); b) die folgenden Bemerkungen zur Mereologie (58): „Die Ausdrücke des Typs ‚Klasse der Gegenstände a' ‘ sind auf dem Boden meiner Mereologie Namen, die gewisse bestimmte ganz ‚gewöhnliche‘ Gegenstände bezeichnen. Diese Ausdrücke haben somit selbstverständlich weder mit irgendeiner Mythologie der ‚Klassen‘, betrachtet als Gegenstände irgendeines ‚höheren Typs‘ oder irgendeiner ‚höheren Reihe‘, etwas gemein noch mit einer solchen Gebrauchsweise des Wortes ‚Klasse‘, bei welcher dieses Wort nicht einen Namen von irgendwelchen Gegenständen, sondern eine spezifische stellvertretende façon de parler von ganz anderer syntaktischer Art bildet, wie dies z. B. in dem System der Herren Whitehead und Russell geschieht.“ II. Die „Grundzüge § 13“ enthalten 422 Sätze der Protothetik mit den 4 angesteuerten Kernsätzen 381. $\prod p\prod q\prod rEEpqEg(p)g(q)$, 398. $\prod pCCN\prod ppp$, 400. $\prod p\prod qCpCNpq$, 422. $\prod p\prod q\prod rCCsqCCqpCsp$. — 381 ist die Extensionalitätsformel, die drei übrigen Sätze entsprechen bis auf die Generalisierungen der in ihnen vorkommenden Variablen dem inzwischen zu einer gewissen kanonischen Geltung gelangten AS des AK von J. Łukasiewicz. Heinrich Scholz (Münster i. W.).

Bochvar, D. A.: Über einen Aussagenkalkül mit abzählbaren logischen Summen und Produkten. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 65—100 (1940) [Russisch].

Der gewöhnliche Aussagenkalkül wird so erweitert, daß auch Konjunktionen und Disjunktionen mit abzählbar vielen Gliedern als Aussagen zugelassen werden, sofern sich das Bildungsgesetz dieser Glieder intuitionistisch, d. h. durch Rekursion, angeben läßt. Ein zugehöriges Axiomensystem wird angegeben. — Dieser vom Verf. angegebene Kalkül kommt im wesentlichen auf ein System des engeren Prädikatenkalküls mit den natürlichen Zahlen als Individuenbereich und mit gewissen intuitionistischen Einschränkungen heraus; denn All- und Seinszeichen des Prädikatenkalküls lassen sich ja als Konjunktion bzw. Disjunktion mit unendlich vielen Gliedern interpretieren. So ist es auch nicht weiter erstaunlich, daß der Gödelsche Vollständigkeitssatz für den engeren Prädikatenkalkül hier sein Äquivalent findet. Ackermann (Burgsteinfurt).

Parry, William Tuthill: Modalities in the survey system of strict implication. J. Symbolic Logic 4, 137—154 (1939).

Die vorliegende Arbeit enthält systematische Untersuchungen über die Reduktion von Modalitäten in Kalkülen, die die Lewissche „strict implication“ enthalten

(C. I. Lewis, A survey of symbolic logic. 1918; C. I. Lewis-C. H. Langford, Symbolic logic. 1932). In diesen Kalkülen kommen die beiden einstelligen Funktoren \sim , \Diamond und die zweistelligen Funktoren \prec , \cdot vor (weitere, z. B. $=$, können nach Bedarf definitorisch eingeführt werden). Für die Ausdrucks- und Folgerungsbestimmungen vgl. die zitierten Werke von Lewis.

Unter einer Modalität versteht man einen sinnvollen Ausdruck („modale Funktion“) mit einer einzigen Variablen, in denen nur die einstelligen Funktoren vorkommen. Unter dem Grad einer Modalität versteht man die Anzahl der in ihr vorkommenden \Diamond -Zeichen. Man zeigt leicht, daß die Anzahl der Klasse der Modalitäten n -ten Grades gleich 2^{n+1} ist. Da in allen von Parry betrachteten Kalkülen $p = \sim \sim p$ beweisbar ist, braucht P. außer den uneigentlichen Modalitäten p bzw. $\sim p$ nur vier Arten von Modalitäten zu untersuchen: (1) die vom Typus A: $\sim \dots \Diamond p$, (2) die vom Typus B: $\Diamond \dots \Diamond p$ (oder $\Diamond p$), (3) die vom Typus C: $\sim \dots \Diamond \sim p$, (4) die vom Typus D: $\Diamond \dots \sim p$. — P. studiert nun für eine Reihe von Kalkülen die Frage, ob es möglich ist, eine endliche Klasse K von Modalitäten so anzugeben, daß es zu jeder Modalität H_1 wenigstens ein Element H_2 von K gibt, so daß $H_1 = H_2$ beweisbar ist. Diese Frage wird für alle behandelten Kalküle vollständig erledigt in dem Sinne, daß für jeden derartigen Kalkül eine solche Klasse angegeben wird und daß weiter gezeigt wird, daß die betreffende Klasse die kleinste ist; d. h. daß die so erhaltenen endlich vielen Modalitäten nicht weiter reduziert werden können.

Hierbei ergibt sich als allgemeines Resultat, daß für jeden Kalkül, der das Axiomensystem $S1$ (vgl. Lewis-Langford, 11,1—11,7) enthält und in dem keine Äquivalenzen zwischen Modalitäten von verschiedenem Typus beweisbar sind, die Anzahl der Klasse der irreduziblen Modalitäten, falls sie endlich ist, von der Form $4n + 2$ ist, während sie, falls es zwischen Modalitäten von verschiedenem Typus beweisbare Äquivalenzen gibt, von der Form $4n + 2$ bzw. $4n$ sein kann. Die von Parry untersuchten Kalküle $K2$, $K3$, $K3'$, $K3''$, $K4$, $K4'$, $K4'''$, $K4''''$, $K5$ besitzen der Reihe nach folgende Axiomensysteme: $S2 = S1 + \{\Diamond(pq) \prec \Diamond p\}$, $S3 = S1 + \{p \prec q \cdot \prec \sim \Diamond q \prec \sim \Diamond p\}$, $S3' = S3 + \{\sim \Diamond \sim \Diamond p \prec \sim \Diamond \sim \Diamond p\}$, $S3'' = S3 + \{\sim \Diamond \sim \Diamond \sim \Diamond p \prec \sim \Diamond p\}$, $S4 = S1 + \{\sim \Diamond \sim p \prec \sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p\}$, $S4' = S4 + \{\sim \Diamond \sim \Diamond \sim \Diamond p \prec \sim \Diamond p\}$, $S4''' = S4 + \{\Diamond \sim \Diamond \sim p = \sim \Diamond \sim \Diamond p\}$, $S4'''' = S3 + \{\Diamond \sim \Diamond \sim p = \sim \Diamond \sim \Diamond p\}$, $S5 = S3 + \{\Diamond p \prec \sim \Diamond \sim \Diamond p\}$. P. zeigt, daß $K3$ 42 irreduzible Modalitäten (2 vom Grad 0, 4 vom Grad 1, 8 vom Grad 2, 12 vom Grad 3, 12 vom Grad 4, 4 vom Grad 5, 0 von jedem höheren Grad), $K3'$ 26, $K3''$ 26, $K4$ 14, $K4'$ 10, $K4'''$ 8, $K4''''$ 12, $K5$ 6 besitzt.

Die Arbeit enthält noch eine Reihe wichtiger Bemerkungen über die Beziehungen zwischen den verschiedenen untersuchten Kalkülen. Insbesondere enthält sie eine Reihe kritischer Bemerkungen zu Arbeiten von Becker [Jb. Phil. u. phän. Forsch. 11, 497—548 (1930)], Churchman [J. Symbolic logic 3, 77—82 (1938); dies. Zbl. 21, 290], Feys [Rev. néoscolast. de philos. 40, 517—553 (1937); 41, 217—252 (1938)]. — Wichtig erscheint die Bemerkung zu dem Beckerschen Kalkül $K4''$, dessen Axiomensystem $S4'' = S4 + \{p \prec \sim \Diamond \sim \Diamond p\}$ ist. $K4''$ ist nämlich mit dem 6-Modalitätenkalkül $K5$ äquivalent. Ein Axiomensystem für einen Kalkül mit den 10 Beckerschen Modalitäten ist z. Z. nicht bekannt. — Die vorliegende, rein kalkulatorische Abhandlung erscheint dem Ref. wegen ihrer großen Genauigkeit von einiger Bedeutung für die Modalitätenlogik, die auf der „strict implication“ fußt, zu sein. Schröter.

Abita, Emanuele: Nuovi indirizzi della logica formale. Esercit. Mat. 12, 88—99 (1940).

Ein Referat über den Stand des klassischen (zweiwertigen) Aussagenkalküls auf der Stufe von 1928, in Anlehnung an die erste Ausgabe der „Grundzüge der theoretischen Logik“ von Hilbert-Ackermann und mit Wiederholung des weit zurückliegenden Russell'schen Satzes, daß die Logik die Wissenschaft sein soll, in der wir nie wissen, wovon wir reden, und auch nicht wissen, ob das, was wir behaupten, wahr ist. Es ist bekannt, daß diese Interpretation längst als unzutreffend erkannt ist.

Heinrich Scholz (Münster i. W.).

Abita, Emanuele: I fondamenti dell'aritmetica secondo una teoria puramente formale. Esercit. Mat., II, s. 12, 142—146 (1940).

Algebra und Zahlentheorie.

Algebraische Gleichungen. Polynome:

● Verriest, G.: *Leçons sur la théorie des équations selon Galois.* Paris: Gauthier-Villars 1939. 344 pag. Frs. 160.—.

Vassiliou, Ph.: Über die Galoissche Gruppe einer Klasse von trinomischen Gleichungen. *Math. Ann.* **117**, 448—452 (1940).

Wenn die Diskriminante des Trinoms $F(x) = x^p + ax^2 + b$ vom Primzahlgrad p einen in $2abp(p-2)$ nicht vorkommenden Primfaktor q in ungerader Potenz enthält und wenn $F(x)$ irreduzibel ist, so hat die Gleichung $F(x) = 0$ über dem rationalen Zahlkörper die symmetrische Gruppe. Zum Beweis wird bemerkt, daß die (q -adisch bestimmte) Trägheitsgruppe eines in q aufgehenden Primideals eine Permutation enthält.

van der Waerden (Leipzig).

Palamà, Giuseppe: Sulla razionalizzazione, con procedimenti elementari, di eguaglianze, equazioni od identità, irrazionali. *Period. Mat.*, IV. s. **20**, 106—115 (1940).

Verf. bezieht sich auf eine Note von C. Ciamberlini und A. Marangoni (dies. Zbl. **22**, 6) und stellt elementare Betrachtungen über die Rationalisierung von Gleichungen der

Form $\sum_{i=1}^n \sqrt[m]{X_i} = 0$ an, wobei er für $m = 2$ zwei verschiedene Verfahren entwickelt, die zu den gleichen Ergebnissen führen. Das erste Verfahren wird dann auf den Fall ausgedehnt, daß m eine Potenz von 2 sei. Schließlich untersucht Verf. das von G. Candido [*Period. Mat.*, III. s. **12** (1914)] für $n = 3$ und $m = 3$ oder 5 entwickelte Verfahren. Cipolla.

Anghelutza, Th.: Sur une limite pour les modules des zéros des polynomes. *Bull. Soc. Math. France* **67**, 120—131 (1939).

van Vleck bzw. Montel hat die obere Schranke der absoluten Beträge von mindestens p Nullstellen der Polynome $a_0 + a_1x + \dots + a_px^p + \dots + a_nx^n$ bestimmt, wenn a_0, a_1, \dots, a_{p-1} und außerdem a_p bzw. a_n gegeben sind und die übrigen Koeffizienten beliebig sind [*Bull. Soc. Math. France* **53** (1925) bzw. *Comment. math. helv.* **7**, dies. Zbl. **11**, 50; vgl. Markovitch, *Mathematica* **15**, dies. Zbl. **21**, 35]. Verf. beweist diese Sätze aufs neue und auch einen Satz von Ballieu (*Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, IV. s. **1**, dies. Zbl. **16**, 386; vgl. Markovitch, *Publ. Math. Univ. Belgrade* **6/7**, dies. Zbl. **19**, 391). Verf. scheint aber diesen Satz von Ballieu nicht zu kennen.

Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

Furtwängler †, Ph.: Über die Newtonschen Potenzsummenformeln. *Mh. Math. Phys.* **49**, 194—196 (1940).

Setzt man $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \equiv (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ und

$$s_k \equiv \begin{cases} x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k & (k = 0, 1, \dots) \\ 0 & (k = -1, -2, \dots), \end{cases}$$

so gelten bekanntlich die Formeln von Newton

$$G_{n+k} \equiv s_{n+k} + a_1s_{n+k-1} + \dots + a_{n-1}s_{k+1} + a_ns_k \equiv 0$$

($k = -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots$). Während der Beweis der Formeln für $k = 0, 1, \dots$ fast trivial ist, werden zum Beweis der anderen Formeln meist „fremde Hilfsmittel benutzt (formale Differentiationen von rationalen Funktionen), die mit dem Problem nichts zu tun haben“. Verf. beweist sie unter Heranziehung eines auch an sich interessanten Hilfssatzes: „Es sei $F_g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine symmetrische Form der x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), deren Grad g höchstens den Wert n hat. Ist dann

$$F_g(x_1, x_2, \dots, x_g, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-g}) \equiv 0,$$

so ist auch $F_g(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$.“ Dieser Hilfssatz wird auf die Form

$$s_g + a_1s_{g-1} + \dots + a_gs_0 \equiv S(x_1, \dots, x_n)$$

angewandt. — Störende Druckfehler: S. 194 muß es in Formel (I), (I'), (I'') statt G_{s+k} heißen G_{n+k} . S. 196, Z. 8 von oben muß die linke Seite der Formel heißen

$$s_g^{(n)} + a_1^{(n)}s_{g-1}^{(n)} + \dots + a_{g-1}^{(n)}s_1^{(n)} + a_g^{(n)}s_0^{(n)}.$$

Bessel-Hagen (Bonn).

Deruyts, J.: Sur la théorie des formes algébriques. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. **25**, 360—374 (1939).

f, f_1, \dots seien Formen in den Variablenreihen $(y), (z), \dots$, die zu einer Variablenreihe (x) kogredient sind. Ihre Koeffizienten $(c), (c_1), \dots$ sind entweder Unbestimmte

oder durch ein lineares invariantes Gleichungssystem eingeschränkt. Betrachtet werden ganze rationale Funktionen p von $c, c_1, \dots, y, z, \dots$ und ihre Transformaten bei linearen Transformationen der Reihe (x) und den dadurch induzierten Transformationen der $(c), (y), \dots$. Wenn die Transformierte von p stets dieselbe ist für die Substitutionen ST und TS , so ist p eine Summe von Invarianten und einer Konstanten. Wenn die Transformierte von p stets dieselbe ist für S und für die transponierte Matrix S' , so ist p ebenfalls eine Summe von Invarianten und einer Konstanten. Wenn die Koeffizienten- und Variablenreihen in zwei Teilsysteme (e) und (e') zerlegt werden und wenn $\varphi(e, e')$ eine Invariante ist, die in den e isobar ist und für die Indices $1, 2, \dots, n$ stets dasselbe Gewicht hat, so gilt

$$\varphi(e, e') = p_1(e)q_1(e') + \dots + p_\nu(e)q_\nu(e') + \varrho,$$

wobei die $p(e)$ und $q(e')$ wieder Invarianten sind. van der Waerden (Leipzig).

Habicht, W.: Über die Zerlegung strikte definiter Formen in Quadrate. *Comment. math. helv.* **12**, 317—322 (1940).

Eine Form $F(x_1, \dots, x_n)$ heißt definit, wenn sie für kein reelles Wertsystem der Variablen negative Werte annimmt; sie heißt positiv definit oder strikte definit, wenn sie nur positive Zahlen darstellt (ausgenommen für $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$). Die Koeffizienten von F seien rational oder wenigstens in einem archimedisch angeordneten Körper. Artin hat mit Überlegungen der abstrakten Körpertheorie den Existenzbeweis geführt, daß sich jede definite Form als Quotient zweier Summen von Formenquadraten darstellen läßt. Dies wird hier nur für strikte definite Formen gezeigt. Der Beweis ist elementar und beruht auf dem folgenden Satz von Pólya: Eine Form in n Variablen, die für alle nichtnegativen Wertsysteme der Variablen, mit Ausnahme des Wertsystems $(0, \dots, 0)$, positive Werte annimmt, läßt sich als Quotient zweier Formen mit lauter positiven Koeffizienten darstellen. Der Verf. setzt auch auseinander, wie man zu einer Darstellung von $F(x_1, \dots, x_n)$ als Quotient zweier Summen von Formenquadraten gelangen kann. Hofreiter (Wien).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Dilworth, R. P.: On complemented lattices. *Tôhoku Math. J.* **47**, 18—23 (1940).

K. Husimi [*Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.* **19**, 766—789 (1937); dies. *Zbl.* **17**, 192] vermutete, daß ein Verband modular sein muß, wenn in ihm eine eindeutige Abbildung $a \leftrightarrow a'$ (Negation) definiert werden kann mit $a \cap a' = n$, $a \cup a' = e$, $(a \cap b)' = a' \cup b'$, $(a \cup b)' = a' \cap b'$ und wenn außerdem jeder Unterverband, der mit a und b für $a \supset b$ auch $a \cap b'$ enthält, ausgeglichen ist. Verf. widerlegt diese Vermutung; er zeigt jedoch, daß jeder längenendliche relativkomplementäre Verband, in dem eine Negation erklärt werden kann und dessen relativkomplementäre Unterverbände sämtlich ausgeglichen sind, modular ist. Ferner beweist Verf., daß jeder längenendliche, komplementäre, nichtmodulare Verband einen komplementären, nichtmodularen Unterverband aus fünf Elementen besitzt. Mit Hilfe des Satzes, daß modulare Verbände mit eindeutigem Komplement Boolesche Algebren sind, folgt hieraus der Satz von G. Birkhoff und M. Ward, daß jeder längenendliche Verband mit eindeutigem Komplement eine Boolesche Algebra ist. Artur Bischof (Berlin).

Livenson, E.: On the realization of Boolean algebras by algebras of sets. *Rec. math. Moscou, N. s.* **7**, 309—311 (1940).

Author gives a simple proof of the following theorem (due to Stone): Every Boolean algebra (i. e. every ring each element of which is idempotent) is isomorphic to an algebra of sets, provided that the sum of any finite family of sets is defined as the set of all things belonging to an odd number of summands and their product as their intersection. Bedřich Pospíšil (Brünn).

Kubo, Keizi: Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen. *J. Sci. Hiroshima Univ. A* **10**, 77—84 (1940).

Verf. beweist: In einem kommutativen Ring ist dann und nur dann jedes vom

Null- und Einheitsideal verschiedene Ideal eindeutig als Produkt von Primidealen darstellbar, wenn 1. der abgeschwächte U-Satz gilt, 2. ein Einheitselement existiert, 3. das Radikal ein Primideal ist, und 4. für kein Primideal \mathfrak{p} zwischen \mathfrak{p} und \mathfrak{p}^2 ein Ideal liegt. — Bemerkung: S. 79, Z. 7 soll es wohl heißen: Ist $(a) = \bar{0}$ für jedes von Null verschiedene a , so ist $(a^2) = (a)(a) = (a)$, woraus die Existenz eines Einheits-elementes folgt. Gibt es aber ein $a \neq 0$ mit $(a) \neq \bar{0}$, so gelten die im Text folgenden Überlegungen. — S. 80, Z. 22 lies „für keine“ statt „nicht für jede“. *Artur Bischof.*

Lombardo-Radice, Lucio: *Intorno alle algebre legate ai gruppi di ordine finito.*

Nota 2. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 3, 239—256 (1939).

Die Untersuchungen der ersten Note (dies. Zbl. 20, 341) werden auf nichtabelsche Gruppen ausgedehnt. Das Radikal des Gruppenrings einer p -Gruppe mit den Elementen u_1, \dots, u_{p^t} in einem Körper der Charakteristik p hat die Basis $u_1 - u_2, u_1 - u_3, \dots, u_1 - u_{p^t}$, was durch Induktion nach t bewiesen wird. Es wird weiter der Gruppenring einer Gruppe \mathfrak{G} der endlichen Ordnung n in einem Körper untersucht, dessen Charakteristik p in n aufgeht. Damit ein Element ε nilpotent sei, ist notwendig, daß die Koeffizienten aller Elemente s , welche p -Sylowgruppen angehören, die Summe 0 haben. Daraus folgt als notwendige Bedingung dafür, daß ε dem Radikal angehöre, daß das gleiche für alle Elemente gs (und sg) mit festem g gilt. Sind S_1, \dots, S_r die p -Sylow-

gruppen von \mathfrak{G} , $\mathfrak{G} = \sum_{\nu=1}^q g_{\nu}^{(\mu)} S_{\mu} = \sum_{\nu=1}^q S_{\mu} g_{\nu}^{(\mu)}$, so ergibt sich als hinreichende Bedingung

dafür, daß $\varepsilon = \sum_{i=1}^{p^t} \sum_{\nu=1}^q \alpha_{i\nu}^{(\mu)} g_{\nu}^{(\mu)} S_i^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{p^t} \sum_{\nu=1}^q \beta_{i\nu}^{(\mu)} S_i^{(\mu)} g_{\nu}^{(\mu)}$, $\mu=1, \dots, r$, dem Radikal angehöre:

$$\sum_{i=1}^{p^t} \alpha_{i\ell}^{(h)} = 0, \quad \sum_{i=1}^{p^t} \beta_{i\ell}^{(h)} = 0; \quad h = 1, 2, \dots, r; \quad \ell = 1, 2, \dots, q.$$

Es werden dann Fälle betrachtet, in denen beide Bedingungen zusammenfallen, also das Radikal des Gruppenrings vollständig bestimmt werden kann. Erstens der Fall, daß es nur eine Sylowgruppe S der Ordnung p^t gibt. Ist $\mathfrak{G} = \sum g_j S$, so sind $g_j(s_1 - s_r)$; $j=1, \dots, q$; $\nu=1, \dots, p^t$ Erzeugende des Radikals. Zweitens der Fall, daß \mathfrak{G} genau eine Untergruppe der Ordnung q enthält, während die nicht dieser Untergruppe angehörigen Elemente Potenzen von p als Ordnungen haben (z. B. Gruppen der Ordnung pq , p und q Primzahlen). Das Radikal wird erzeugt von den Elementen, für die Summe der Koeffizienten aller Elemente jeder Rechts- und jeder Linksrestklasse nach jeder p -Sylowgruppe 0 ist. Diese Untersuchungen müssen mit der Darstellungstheorie mod. p von R. Brauer zusammenhängen. *M. Deuring (Jena).*

Spampinato, Nicolò: *Introduzione dei numeri complessi, duali, bireali, bicompleksi e biduali col metodo delle matrici quadrate del 2° ordine.* Esercit. Mat. 12, 1—18 e 59—82 (1940).

Ausführliche elementare Einführung in die Matrizenrechnung und in die Matrizenalgebren mit der Darstellung der komplexen und der dualen Zahlen durch zweizeilige Matrizen als Beispielen. *M. Deuring (Jena).*

Zahl- und Funktionenkörper:

Rédei, Ladislaus: *Über den Euklidischen Algorithmus in reell quadratischen Zahlkörpern.* Mat. fiz. Lap. 47, 78—89 u. deutsch. Zusammenfassung 90 (1940) [Ungarisch].

Es wird bewiesen, daß im quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{D})$ kein E. A. (= Euklidischer Algorithmus) existiert, wenn die Diskriminante D zusammengesetzt und $(6, D) = 1$ ist. Damit sind alle $R(\sqrt{D})$ mit E. A. bekannt geworden, in denen D zusammengesetzt ist. Das sind $D = -8, -4, 8, 12, 21, 24, 28, 33, 44, 57, 76$; Vgl. L. Schuster (dies. Zbl. 20, 101), der den Fall $3 \mid D$ erledigt hat. Jetzt beim Referat bemerkt Verf., daß ihm diese Arbeit erst nach dem Druck bekannt geworden ist. Es brauchen nur noch die Primdiskriminanten $D \geq 61$, $D \not\equiv 5 \pmod{24}$ untersucht zu werden.

Autoreferat

Humbert, Pierre: Sur les nombres de classes de certains corps quadratiques. Comment. math. helv. 12, 233—245 (1940).

Nach Bestimmung der Dichte der quadratfreien zu einer gegebenen natürlichen Zahl Q primen Zahlen gelingt der Nachweis, daß es unendlich viele imaginäre quadratische Zahlkörper gibt, deren Klassenzahl h durch die beliebige natürliche Zahl g teilbar ist. Eine Übertragung des Resultats auf reelle quadratische Zahlkörper bleibt unvollständig, gestattet aber für $g = 2$ die „seltsame Folgerung“, daß der Ausdruck $4P^4 + 1$ für $P > 1$ keine Primzahlen liefert, was sich aber auch als natürliche Folgerung aus der Zerlegung $(2P^2 - 2P + 1)(2P^2 + 2P + 1)$ ergeben hätte. *H. Brandt.*

Fogels, E.: Über die Möglichkeit diophantischer Gleichungen in relativ quadratischen Zahlkörpern. Acta Univ. Latviensis, III. s. 9, 273—282 (1940).

Die Arbeit bringt einige Sätze, die gestatten, aus der Unmöglichkeit einer Gleichung 3. Grades von mehreren Unbekannten $f(x, y, \dots) = 0$ in einem Körper Ω auf deren Möglichkeit oder Unmöglichkeit in darüber relativ quadratischen Körpern $\Omega(\sqrt{\lambda})$ zu schließen. — Eine entscheidende Rolle hat dabei der homogene Teil 3. Grades von f , etwa f_3 genannt. Ist $f_3 = 0$ in Ω (nicht nur trivial mit lauter Nullen) lösbar, so gibt es solche $\Omega(\sqrt{\lambda})$, in denen $f = 0$ möglich wird; dies leistet jedoch nie die Adjunktion von $\sqrt{-3}$. Ist aber $f_3 = 0$ in Ω unlösbar, so ist, falls ferner noch alle Unbekannten in 3. Potenz vorkommen, $f = 0$ auch in jedem $\Omega(\sqrt{\lambda})$ unmöglich. — Diese Unmöglichkeit überträgt sich dann auch auf jeden nur durch Quadratwurzeln aufgebauten („konstruierbaren“) Oberkörper. — Im letztgenannten Falle folgt schließlich aus der Unmöglichkeit von $z^2 + f = 0$ in Ω die Unmöglichkeit von $z^4 + f = 0$ in jedem $\Omega(\sqrt{\lambda})$. *Aigner (Graz).*

Tihanyi, Nikolaus: Die verallgemeinerte Lagrangesche Resolvente. Mat. természett. Értes. 58, 678—682 u. deutsch. Zusammenfassung 683—684 (1939) [Ungarisch].

Verf. bestimmt die Lagrangesche Resolvente eines Kreiskörpers im Falle, wenn die Grundzahl des Kreiskörpers eine n -te primitive Einheitswurzel ist, wo $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$ ist und p_1, p_2, \dots, p_s voneinander verschiedene Primzahlen sind. Diese Resolvente wird durch das Produkt von s einfacheren Resolventen dargestellt.

Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

Taussky, Olga, and John Todd: A characterisation of algebraic numbers. Proc. roy. Irish Acad. A 46, 1—8 (1940).

Es wird die Frage behandelt, unter welchen Bedingungen die vorgegebene rationale Matrix A Darstellungsmatrix einer algebraischen Zahl in einer regulären Darstellung eines algebraischen Zahlkörpers ist. Ist das charakteristische Polynom $\Delta = |A - \lambda E|$ irreduzibel (über dem $k(1)$), so ist A Darstellungsmatrix der genannten Art, ist Δ reduzibel, so hat A die gewünschte Eigenschaft dann und nur dann, wenn $\Delta = f^m(\lambda)$ m -te Potenz eines irreduziblen Polynoms $f(\lambda)$ und A äquivalent der direkten Summe von m Matrizen mit dem charakteristischen Polynom $f(\lambda)$ ist. Ist ein hyperkomplexes System H über $k(1)$ mit Einselement vorgelegt, und ist das charakteristische Polynom einer Matrix einer regulären Darstellung von H irreduzibel, so ist H einem algebraischen Zahlkörper isomorph. Ist ein hyperkomplexes System H keinem algebraischen Zahlkörper isomorph, so ist das charakteristische Polynom des allgemeinen Elementes von H reduzibel. (Bei den Quaternionen z. B. $[(\lambda - r_0)^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2]^2$, wenn $r_0 + r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3$ das allgemeine Element.) *Bullig (Hamburg).*

Gelfond, A.: Sur la divisibilité de la différence des puissances de deux nombres entiers par une puissance d'un idéal premier. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 7—24 (1940).

Autrefois [Bull. Acad. Sci. URSS. 1939] l'auteur a démontré que si α et β sont algébriques ($\neq 0, \neq 1, \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ irrationnel), l'inégalité

$$\left| \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} - \theta \right| < e^{-\ln^{3+\epsilon} H} \quad (\epsilon > 0)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions algébriques différentes θ de la hauteur H . En posant $\theta = \frac{m}{n}$, $(m, n) = 1$, il obtient l'inégalité

$$(1) \quad |\alpha^n - \beta^m| > |\beta|^m e^{-\ln^{3+\varepsilon} |m|}, \quad (\varepsilon > 0)$$

quand $|\beta|^m \geq |\alpha|^n$, $n > n_0(\varepsilon)$, $m > 0$, $|\alpha| \neq 1$, $|\beta| \neq 1$. Dans le présent article, l'auteur en utilisant la méthode p -adique introduite par MM. Mahler et Skolem (ce Zbl. 10, 390; 12, 13, 53) établit une inégalité analogue pour la valeur p -adique $|\alpha^n - \beta^m|_p$ dans le cas où α et β sont des nombres algébriques par rapport à un corps algébrique R d'ordre ν , \wp étant un idéal premier du corps. Ainsi dans le cas où R désigne le corps des nombres rationnels, on a pour tout nombre premier p :

$$(2) \quad |\alpha^n - \beta^m|_p > p^{-\ln^{3+\varepsilon} n}, \quad (\varepsilon > 0)$$

si $n \geq m > 0$, $n \geq n_0(\varepsilon)$, α et β algébriques, $|\alpha| \neq 0, 1$, $|\beta| \neq 0, 1$, $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ irrationnel, $|\alpha|_p \geq 1$, $|\beta|_p \geq 1$. De (1) et (2) il tire: Si α, β, γ sont des nombres algébriques réels, $|\alpha| \neq 0, 1$, $|\beta| \neq 0, 1$, $|\gamma| \neq 0, 1$, dont l'un au moins n'est pas une unité algébrique, l'équation $\alpha^x + \beta^y = \gamma^z$ n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres rationnels entiers x, y, z , sauf dans le cas où

$$\alpha = \pm 2^{k_1}, \quad \beta = \pm 2^{k_2}, \quad \gamma = \pm 2^{k_3},$$

k_1, k_2, k_3 étant rationnels.

J. F. Koksma (Amsterdam).

Hummel, P. M.: Continued fractions and matrices. Tôhoku Math. J. 46, 340—359 (1940).

Der Verf. verallgemeinert die Jacobische Kettenbruchentwicklung auf n -fache Kettenbrüche, befaßt sich mit Fragen der Konvergenz und mit Periodizität. Er zeigt, daß ein n -facher konvergenter periodischer Kettenbruch $n-1$ Zahlen darstellt, die in einem algebraischen Körper $K(\varrho)$ vom Grad $\leq n$ liegen, wo ϱ Wurzel der charakteristischen Gleichung ist. Zuletzt kommen Anwendungen auf die algebraische Zahlentheorie. Der Verf. scheint die bedeutende Arbeit „Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus“ von O. Perron [Math. Ann. 64, 1—76 (1907)] nicht gekannt zu haben, in der die obigen Probleme in viel gründlicherer Weise behandelt wurden.

Hofreiter (Wien).

Mahler, Kurt: On a geometrical representation of p -adic numbers. Ann. of Math., II. s. 41, 8—56 (1940).

Verf. gibt ein Analogon des Kettenbruchverfahrens für P -adische Zahlen. Er beweist neben einer Reihe von Einzelresultaten eine Verallgemeinerung des Satzes von Lagrange, nach dem das Kettenbruchverfahren die besten Näherungsbrüche für eine Zahl ζ liefert, des Satzes von Hurwitz-Borel, nach welchem unter drei konsekutiven Näherungsbrüchen mindestens einer, $\frac{p_n}{q_n}$, existiert mit $\left| \zeta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}} q_n^{-2}$,

aber für wenigstens eine irrationale Zahl $\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \varepsilon \right) q^{-2}$ unlösbar ist, sowie eines Satzes von Kintchine und eines Satzes von Tchebycheff. Der Satz von Lagrange über periodische Kettenbrüche hat bei dieser Übertragung kein Analogon.

Ist P eine Primzahl und $T_n = \left(\frac{p_n p'_n}{q_n q'_n} \right)$ eine Folge mit den Eigenschaften $p_n q'_n - p'_n q_n = P^n$, $(q_n, q'_n) = 1$, $T_n^{-1} T_{n+1} = \Omega_{n+1}$ ganzzahlig, so gibt es zu jedem n eine ganze Zahl A_n mit $0 \leq A_n \leq P^n - 1$, $p_n + q_n A_n \equiv 0 (P^n)$, $p'_n + q'_n A_n \equiv 0 (P^n)$. Dann ist $A_{n+1} \equiv A_n (P^n)$. Die Folge T_n definiert also eine ganze P -adische Zahl $\zeta = \lim A_n$. Jede ganze P -adische Zahl kann auf diese Weise durch eine Folge T_n definiert werden. Zwei Folgen T_n, T_n^* definieren die gleiche Zahl ζ genau dann, wenn $T_n^* = T_n S_n$, wo S_n ein Element der Modulgruppe ist. Unter den Folgen T_n , welche die gleiche Zahl definieren, greift Verf. eine sog. reduzierte heraus: Sei

$\Phi^2(X, Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2$ eine reduzierte positive quadratische Form, so daß also die Wurzel z der Gleichung $\Phi(z, 1) = 0$ mit $J(z) > 0$ in dem durch $R(z) = \pm \frac{1}{2}$, $|z| = 1$ begrenzten Fundamentalber. F der Modulgruppe liegt. Sind alle Formen

$$\Phi_n^2(X, Y) = \Phi^2(p_n X + p'_n Y, q_n X + q'_n Y) = A_n X^2 + 2B_n XY + C_n Y^2$$

reduziert, so heißt $\{T_n\}$ reduziert. Es gibt unter den ζ definierenden Folgen stets genau eine reduzierte. Ist z_n die Wurzel von $\Phi_n(z, 1) = 0$ mit $J(z_n) > 0$, so sagt Verf., die Folge z_n stelle ζ dar. Für eine reduzierte Folge T_n existieren unter den Transformationen $\Omega_n = T_n^{-1} T_{n+1}$ nur endlich viele verschiedene. Sie stellen das Analogon der Kettenbruchtransformationen im reellen Zahlkörper dar. Sie werden für $P = 2, 3, 5$ vollständig angegeben. Unter den ganzzahligen loxodromischen Substitutionen der Determinante P , deren einer Fixpunkt in F liegt, gibt es solche, deren Fixpunkte minimalen Imaginärteil haben. Bezeichnen wir dies Minimum mit

$Y(P)$, so gilt $Y(P) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dann und nur dann, wenn $P \equiv 1(6)$; ferner gilt $Y(2) = \frac{\sqrt{7}}{2}$,

$Y(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $Y(5) = 1$ (usw. berechnet bis $P = 103$). Verf. vermutet $Y(P) \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3}$ (inzwischen von Davenport bewiesen). Ist $z_n = x_n + i y_n$ die ζ darstellende Folge, so vermutet Verf. $\limsup Y_n \geq Y(P)$; dies wird für $P = 2, 3, 5$, $P \equiv 1(6)$ bestätigt. Für die rationalen bzw. irrationalen Zahlen im Ring der ganzen P -adischen Zahlen werden Eigenschaften der zugehörigen Folgen Ω_n, y_n hergeleitet. Die Übertragung des Satzes von Lagrange über die besten Näherungen lautet so: Sei

$T_n = \begin{pmatrix} p_n & p'_n \\ q_n & q'_n \end{pmatrix}$ die reduzierte Folge, welche die ganze P -adische Zahl ζ definiert, n ein beliebiger Index. Ist dann $|p + q\zeta|_P \leq P^{-n}$, $\Phi(p, q) > 0$, mit ganz rationalen p, q , dann gilt $\Phi(p, q) \geq \Phi(p_n, q_n)$. Der Satz von Hurwitz-Borel lautet: Unter drei konsekutiven Paaren (p_n, q_n) gibt es mindestens eines, für welches $|p_n + q_n \zeta|_P \leq P^{-n}$, $0 < \Phi(p_n, q_n) \leq c_P \cdot P^n$ gilt; ist $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so gibt es eine ganze P -adische Zahl ζ , für welche das System $|p + q\zeta|_P \leq P^{-n}$, $0 < \Phi(p, q) \leq (c_P - \varepsilon) \cdot P^n$ nicht lösbar ist. Verf. beweist diesen Satz für $P = 2, 3, 5$, $P \equiv 1(6)$. Es ist $c_2 = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_5 = 1$, $c_P = \frac{2}{\sqrt{3}}$ für $P \equiv 1(6)$. Bullig (Hamburg).

Davenport, H.: Note on linear fractional substitutions with large determinant. Ann. of Math., II. s. 41, 59—62 (1940).

Verf. beweist den Satz: Sei z_0 komplex $\neq 0$; ist P eine große natürliche Zahl, so gibt es eine ganzzahlige Substitution $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ der Determinante P , welche einen Fixpunkt f mit

$$f = z_0 + O\left(P^{-\frac{1}{12} + \varepsilon}\right)$$

hat. Die Vorzeichen von $\Re(f) - \Re(z_0) = s_1$, $|f| - |z_0| = s_2$ können außerdem beliebig vorgeschrieben werden. Für $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $s_1 < 0$, $s_2 > 0$ folgt daraus: Sind die Substitutionen der Determinante P gegeben, welche einen Fixpunkt in dem von $\Re(z) = \pm \frac{1}{2}$, $|z| = 1$ begrenzten Fundamentalbereich der Modulgruppe haben,

so gilt: Minimum der Imaginärteile der Fixpunkte $= \frac{1}{2}\sqrt{3} + O\left(P^{-\frac{1}{12} + \varepsilon}\right)$. [Vgl. vorstehend besprochene Arbeit von K. Mahler.] Dem Satze liegt der Nachweis einer Lösung eines Systems von Ungleichungen und Kongruenzen zugrunde, welcher durch Abschätzung endlicher Exponentialsummen erfolgt. Bullig (Hamburg).

Châtelet, François: Points exceptionnels d'une cubique de Weierstrass. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 90—92 (1940).

Andeutung einer Methode zur Bestimmung der Gruppe der Divisorenklassen endlicher Ordnung eines elliptischen Funktionenkörpers über einem algebraischen

Zahlkörper endlichen Grades, die sich an die p -adischen Betrachtungen von E. Lutz [J. reine angew. Math. **177**, 238—247 (1937); dies. Zbl. **17**, 53] anschließt. Reichardt.

Zahlentheorie:

Bunický, E.: Über ein System von Kongruenzen, welches mit dem Wilsonschen Satz zusammenhängt. Čas. mat. fys. **69**, 97—107 u. deutsch. Zusammenfassung 108—109 (1940) [Tschechisch].

Der Verf. beweist: 1. Ist $\sigma(k, n)$ die k -te ($1 \leq k \leq n$) elementarsymmetrische Funktion der Größen $1, 2, \dots, n$, so ist

$$\sigma(k, n) = n(n+1) \cdot \eta_{2k-2}(n)/d_k,$$

wo $\eta_{2k-2}(n)$ ein Polynom in n ist. Die Koeffizienten von $\eta_{2k-2}(n)$ und $d_k > 0$ sind dabei ganze, nur von k abhängige Zahlen. 2. Es sei $p > 1$, ganz. Dann und nur dann ist p eine ungerade Primzahl, wenn $\sigma(1, p-1) \equiv 0$, $\sigma(2l, p-1) \equiv 0 \pmod{p}$ ($l = 1, 2, \dots, [p-2/2]$) ist. Vl. Knichal (Prag).

Schwarz, Štefan: Sur le nombre des racines et des facteurs irréductibles d'une congruence donnée. Čas. mat. fys. **69**, 128—145 (1940).

Es sei gegeben (1) $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{p}$ (a_1, \dots, a_n ganz rat., p pos. Primzahl) mit der Diskriminante $D \not\equiv 0 \pmod{p}$. Zur Bestimmung der Anzahl r_1 der Wurzeln von (1) wird neben die Sätze von König-Rados-Kronecker-Gegenbauer und von Hurwitz-Dickson-Cipolla der folgende dritte gestellt und auf zwei Arten bewiesen: Man stellt D in der bekannten Form einer Determinante n -ter Ordnung $D = |s_{i+k-2}|$ dar, wobei s_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) die l -te Potenzsumme der (als Galoissche Imaginäre gedeuteten) Wurzeln von (1), also ein ganzer rationaler Ausdruck von a_1, \dots, a_n ist. Es wird noch mit $D^{(m)}$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$) die Determinante bezeichnet, die aus D nach der Ersetzung der $m+1$ -ten Zeile $s_m, s_{m+1}, \dots, s_{m+n-1}$ durch $s_{mp}, s_{mp+1}, \dots, s_{mp+n-1}$ entsteht (insbesondere ist $D^{(0)} = D$). Dann ist $r_1 \equiv \frac{1}{D} (D^{(0)} + D^{(1)} + \dots + D^{(n-1)}) \pmod{p}$. Der Satz wird noch in einer zweiten ähnlichen Form gewonnen, in der auch die Anzahl v aller mod p irreduziblen Faktoren von (1) mitspielt. Weiter werden beide Sätze zur Bestimmung der Anzahl r_i ($i = 2, 3, \dots$) der mod p irreduziblen Faktoren i -ten Grades von (1) verallgemeinert (der Beweis nur für $i = 2$ ausgeführt). Durch Anwendungen ergeben sich die bekannten Sätze über quadratische, kubische und binomische Kongruenzen und der Satz von Pellet-Voronoi-Stickelberger $\left(\frac{D}{r}\right) = (-1)^{n+v}$ über den allgemeinen Fall. L. Rédei (Budapest).

Schwarz, Štefan: Über einen Satz von S. Lubelski. Čas. mat. fys. **69**, 146—147 (1940).

Verf. beweist noch einmal den folgenden (schon vor S. Lubelski bekannten) Satz: Es sei $f(x)$ ein ganzes, ganzzahliges, nicht normales, irreduzibles Polynom. Es sei ferner $\varphi(x)$ eine Galoissche Resolvente von $f(x)$, D die Diskriminante von $\varphi(x)$ und p eine rationale Primzahl, für die $(D, p) = 1$. Dann ist $\varphi(x) \pmod{p}$ zerlegbar.

Wegner (Heidelberg).

Pillai, S. S.: Generalisation of a theorem of Mangoldt. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **11**, 13—20 (1940).

Die Arbeit ist ein Teil der im Jahre 1933 eingereichten Dissertation des Verf. Es sei $t(n)$ die Anzahl aller Primfaktoren von n (mehrfache mehrfach gezählt); $N_{r,t}(x)$ sei die Anzahl aller Zahlen $n \leq x$ mit $t(n) \equiv t \pmod{r}$; $N'_{r,t}(x)$ sei die Anzahl aller derartigen quadratfreien Zahlen. Es wird bewiesen: $N_{r,t}(x) \sim x r^{-1}$, $N'_{r,t}(x) \sim 6\pi^{-2} x r^{-1}$ (die zweite Formel wurde auch von Selberg, dies. Zbl. **19**, 393, bewiesen). Verf. hat ursprünglich den Fall $r = \text{Primzahl}$ gelöst; die Verallgemeinerung auf beliebiges r stammt von S. Chowla. Außer den geläufigen Hilfsmitteln benutzt Verf. eine Formel von Ramanujan (Collected Papers 269) über die Verteilung von Zahlen, welche genau durch k verschiedene Primzahlen teilbar sind. Jarník (Prag).

Pillai, S. S.: On m consecutive integers. Pt. 1. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 11, 6—12 (1940).

Satz I: Ist $m \leq 16$, so gibt es in jeder Sequenz von m aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mindestens eine, die zu allen übrigen der Sequenz teilerfremd ist. Der Beweis dieses Satzes ist sehr merkwürdig. Durch gleichzeitige Betrachtung der beiden Sequenzen $n, \dots, n + m - 1$ und $n + 1, \dots, n + m$ gelangt Verf. mit elementaren Schlüssen zu dem Hilfssatz: Wenn die Aussage von Satz I für eine ungerade Zahl $m \geq 5$ zutrifft, so trifft sie auch für die nächstfolgende gerade Zahl $m + 1$ zu. Ein entsprechender Hilfssatz, der es gestatten würde, von einer geraden Zahl m auf die nächstfolgende ungerade zu schließen, besteht aber nicht. Hiernach genügt es, die Fälle $m = 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ einzeln zu behandeln. Dies geschieht mit der gleichen Methode, die zum Beweise des Hilfssatzes angewandt wurde. Für $m = 17$ ist die Behauptung von Satz I bereits falsch. Gegenbeispiele: Die beiden Sequenzen 2184, ..., 2210 und 27830, ..., 27846. Verf. vermutet, kann aber nicht beweisen, Satz II: Ist $m \geq 17$, so gibt es stets beliebig viele Sequenzen von m aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, von denen keine zu allen übrigen der Sequenz teilerfremd ist. Bis zu $m = 430$ hat er dies verifiziert. Die Methode der Verifikation, eine eigentümliche Abwandlung des Siebes des Eratosthenes, wird ebenfalls geschildert. *Bessel-Hagen.*

Khintchine, A.: Über die Addition von Folgen natürlicher Zahlen. Uspechi mat. nauk. 7, 57—61 (1940) [Russisch].

Bezeichnungen: Ist M eine Menge von natürlichen Zahlen, so sei $M(n)$ die Anzahl der $x \in M$ mit $x \leq n$. Sind A, B zwei Mengen natürlicher Zahlen, so bezeichne man mit a die Elemente von A , mit b diejenigen von B ; es sei $C = A + B$ die Menge aller a , aller b und aller $a + b$; es sei C_1 die Menge aller b und aller $a + b$; es sei C_2 die Menge aller $a + b$ und aller $a + b - 1$ (im wichtigsten Falle $1 \in A, 1 \in B$ ist $C_1 \subset C \subset C_2$). Es sei t eine natürliche Zahl. — Resultate: Ist $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $A(n) - \alpha(n + 1) + 1 \geq \lambda \geq 0$, $B(n) \geq \alpha n$ für $n = 1, 2, \dots, t$, so ist $C(t) \geq \text{Min}(2\alpha t, 2\alpha(t + 1) - 1 + 2\lambda)$. Daraus folgt sehr leicht: Ist $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $A(n) \geq \alpha n$, $B(n) \geq \alpha n$ für $n = 1, 2, \dots, t$, so ist (1) $C(t) \geq 2\alpha t$, ja sogar schärfer (2) $C_1(t) \geq 2\alpha t$. Dabei ist (1) ein bekannter Khintchinscher Satz (dies. Zbl. 6, 155; vgl. auch Scherk, dies. Zbl. 19, 393); der heutige Beweis ist aber im Verhältnis zum ursprünglichen wesentlich einfacher.

Jarník (Prag).

Schnirelmann, L. G.: Über die Addition von Folgen. Uspechi mat. nauk. 7, 62—63 (1940) [Russisch].

Wegen der Bezeichnungen vgl. das vorstehende Referat. Es sei $\alpha > 0$, $\beta > 0$, man setze voraus, daß $A(n) \geq \alpha n$, $B(n) \geq \beta n$ für $n = 1, 2, \dots, t$ ist. Dann beweist Verf. sehr einfach, daß $C_2(t) \geq t \cdot \text{Min}(1, \alpha + \beta)$. Das analoge Problem mit C statt C_2 ist bekanntlich viel schwieriger und ist nur in einigen Spezialfällen (vgl. das vorstehende Referat und die dort angeführte Literatur) gelöst.

Jarník (Prag).

Raikov, D.: Beweis des Schnirelmannschen Satzes über die Dichte der arithmetischen Summe von Mengen. Uspechi mat. nauk. 7, 97—101 (1940) [Russisch].

Ist M eine Menge nichtnegativer Zahlen, $x > 0$, so sei $m(x, M)$ das innere Lebesguesche Maß des Durchschnittes von M mit dem Intervall $(0, x)$, weiter $\pi(x, M) = \inf_{0 < \xi < x} m(\xi, M)$. Verf. zeigt: Sind A, B zwei Mengen nichtnegativer Zahlen,

$0 \in A, 0 \in B$, und bedeutet $A + B$ die Menge aller Zahlen der Gestalt $a + b$ ($a \in A, b \in B$), so ist $\pi(x, A + B) \geq \text{Min}(1, \pi(x, A) + \pi(x, B))$ für $x > 0$. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\pi(x, A) \rightarrow 1$, $\pi(x, B) \rightarrow 1$ (für $x \rightarrow 0 +$) wurde der Satz bereits von Schnirelmann (dies. Zbl. 21, 207) bewiesen. Der Beweis des Verf. stellt eine Übertragung einer Methode dar, die Besicovitch (dies. Zbl. 12, 394) in dem entsprechenden Problem der additiven Zahlentheorie angewendet hatte. Verf. hat (dies. Zbl. 22, 210) auch einen anderen Beweis publiziert, der sich der Schnirelmannschen Methode anschließt.

Jarník (Prag).

● **Gupta, Hansraj:** Tables of partitions. Indian Math. Soc. 1939. VI, 81 pag.

Fogels, E.: On average values of arithmetical functions. Acta Univ. Latviensis, III. s. 10, 285—310 (1940).

Im folgenden bedeuten k, n, m natürliche Zahlen ($k \geq 2$), p bedeutet Primzahlen, $\pi(x)$ die Anzahl der $p \leq x$. Es sei: $q_k(n) = 1$, wenn n durch kein p^k teilbar ist, sonst $q_k(n) = 0$; $\lambda(n) = (-1)^e$, wo e die Anzahl aller Primfaktoren von n bedeutet (mehrfache mehrfach gezählt); $\nu(n)$ sei die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n ; $A(n) = \log p$ für $n = p^m$, sonst $A(n) = 0$; es sei $\mu(n)$ die Möbiussche, $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion, $\sigma(n)$ die Teilersumme, $d(n)$ die Teileranzahl von n . Es sei $\varepsilon > 0$, c sei eine solche Zahl, daß $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^c)$, $\alpha = \frac{1+4c}{2+4c} + \varepsilon$, $\beta = \frac{1+8c}{2+8c} + \varepsilon$, $\gamma = \frac{k}{3k-1}$ (es darf z. B. $c = 19/116$ gesetzt werden). Es handelt sich um die Abschätzung von $S(x, h) = \sum_{a_n} a_n$, wo a_n eine von den folgenden zahlentheoretischen Funktionen bedeutet: $x < n \leq x+h$

(1) $A(n)$; $\mu(n)$; $\lambda(n)$; $n^{-1}\lambda(n)\varphi(n)$; $n^{-1}\lambda(n)\sigma(n)$; $\lambda(n)2^{\nu(n)}$; $\lambda(n)d(n)$; $q_k(n)$.

Es wird bewiesen: Wird $\Gamma = 1$ für $a_n = A(n)$, $\Gamma = (\zeta(k))^{-1}$ für $a_n = q_k(n)$, $\Gamma = 0$ in den übrigen sechs Fällen gesetzt, so ist in den ersten fünf Fällen von (1) $S(x, x^\alpha) = \Gamma x^\alpha + o(x^\alpha)$, in den zwei folgenden Fällen $S(x, x^\beta) = o(x^\beta)$ und im letzten Falle $S(x, x^\gamma \log^3 x) = \Gamma x^\gamma \log^3 x + o(x^\gamma \log^3 x)$. Folgerung: $\pi(x + x^\alpha) - \pi(x) \sim x^\alpha \log^{-1} x$. Wegen der früheren Ergebnisse und der benutzten Hilfsmittel (es werden auch neuere Sätze über die Lage der Nullstellen von $\zeta(s)$ benutzt) vgl. Hoheisel (Primzahlprobleme in der Analysis. Berliner Sitzungsber. 1930, 580—588), Heilbronn (dies. Zbl. 6, 156), Ingham (dies. Zbl. 17, 389), Tschudakoff (dies. Zbl. 13, 346 und 21, 11), Titchmarsh (dies. Zbl. 18, 389). — Der Faktor $\sigma(1 - \sigma)^{-2}$ im O -Glied von (19) soll richtig $(\sigma - 1)^{-1}$ heißen, was aber weiter nicht stört. *Jarník (Prag).*

Turán, Paul: Über die Primzahlen der arithmetischen Progression. II. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 187—192 (1939).

Für $(k, l) = 1$ bezeichne $P(k, l)$ die kleinste positive Primzahl $\equiv 1 \pmod{k}$. Unter der Annahme, daß alle Dirichletschen L -Funktionen $L(s)$ im Rechteck: $1 - \delta < \sigma \leq 2$ ($0 < \delta \leq \frac{1}{2}$), $|t| \leq \alpha$ nicht verschwinden, leitet Verf. folgende Abschätzung her: $P(k, l) < a\varphi(k)^c$, wobei a eine absolute positive Konstante und c eine nur von α und δ abhängige positive Konstante bedeuten. $\varphi(k)$ ist die Eulersche Funktion. Verf. hat in der ersten Arbeit (dies. Zbl. 16, 391) eine schärfere Abschätzung von $P(k, l)$ unter Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung angegeben. Vgl. hierzu noch S. Chowla, dies. Zbl. 9, 8. *Z. Suetuna (Tokyo).*

Obláth, Richard: Sur les nombres $x^2 - 1$. Mat. fiz. Lap. 47, 58—76 u. franz. Zusammenfassung 76—77 (1940) [Ungarisch].

Es handelt sich um den Nachweis der Unmöglichkeit von (1) $x^2 - 1 = y^n$ in ganzen rationalen Zahlen $n (\geq 5, \text{ ungerade})$, $x (\neq \pm 1, \pm 3)$, y . (Den Fall $n = 3$ hat Euler erledigt.) Nach Nagell (dies. Zbl. 11, 98) ist (1) sicher unlösbar, außer wenn n eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{8}$ und in der Grundeinheit $\varepsilon = u + v\sqrt{n} (> 1)$ des Körpers $k(\sqrt{n})$ $u - v \equiv -1 \pmod{8}$ ist. (Ref. bemerkt, daß letztere Bedingung sich auch in der Form $\frac{u}{4} \equiv \frac{n-1}{8} \pmod{2}$ angeben läßt.) Verf. beweist eine Reihe Sätze verschiedener Natur, die n noch weiter, außerdem x und y einschränken. Dabei ist ihm entgangen, daß für eine Primzahl p und eine zu p prime ganze rationale Zahl c die Zahlen c und $c' (r, p) = 1$ nur gleichzeitig p -te Potenzreste mod p^2 sein können. Auch vergaß er, auf das Eulersche Kriterium für Potenzreste Rücksicht zu nehmen. So entstand es, daß er mehr bewiesen hat, als er es selber meinte. Satz 1 α) läßt sich einfach so formulieren (nachher bedeutet n eine Primzahl): (I) Es ist (1) unlösbar, wenn $2^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n^2}$ (im Originaltext stehen zwei Bedingungen, die einander und der angegebenen inhaltlich

gleich sind). Satz 2 lautet (in unveränderter Form): (II) Es ist (1) unlösbar, wenn $3^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n^2}$. Satz 1 β) „(1) ist unlösbar, wenn 2^{n-2} ein n -ter Potenzrest mod n^2 und $2^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n^2}$ ist“ ist inhaltlos, weil die zwei Bedingungen gegensätzlich sind. Satz 3 sollte sich auf reguläre n beziehen, ist aber nur ein Teil von (I). Aus (I) und (II) folgt, daß (1) für $n < 3529$ unlösbar ist. Von den übrigen Sätzen seien noch erwähnt: (1) hat bei festem n höchstens eine Lösung. In einer Lösung muß x (im Zehnersystem) wenigstens 14000 Ziffern haben. Es werden noch einige verwandte Fragen berührt. Die einfachen Beweise beruhen auf Sätzen von Lubelski, Nagell, Siegel und Vandiver. Ref. muß noch auf den störenden Fehler hinweisen, daß an einigen Stellen statt „ p -ter Potenzrest“ falsch „Potenzrest“ steht. *L. Rédei* (Budapest).

Moessner, Alfred: Einige numerische Identitäten. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 10, 296—306 (1939).

Es handelt sich zunächst um das System der beiden Relationen

$$\sum_{i=1}^3 G_i^n = \sum_{i=1}^3 J_i^n \quad \text{für } n = 1, 3. \quad (1)$$

Für diese wird „eine allgemeine Lösung“ angegeben, in der G_1, \dots, J_3 als ganze rationale, ganzzahlige Funktionen von vier Parametern dargestellt werden. Der Beweis, daß durch diese Parameterdarstellung wirklich die allgemeinste Lösung von (1) geliefert wird, fehlt. Auch für die beiden Systeme, die aus (1) durch Hinzufügung weiterer Relationen, wie $G_1 G_2 G_3 = J_1 J_2 J_3$, $G_3 - G_2 = G_2 - G_1$, $G_3 = 0$, $G_1 - G_2 = J_1 - J_2$ und anderer entstehen, werden Lösungen in Parameterdarstellung angegeben, ohne daß ersichtlich ist, ob diese Lösungen die allgemeinsten oder nur Beispiele sein sollen. Eine schwer zu übersehende Fülle ähnlicher Resultate schließt sich an, z. B. die Re-

lationen $\sum_{i=1}^2 K_i^n = \sum_{i=1}^4 L_i^n$ ($n = 1, 3$) oder $\sum_{i=1}^6 A_i^n = \sum_{i=1}^6 B_i^n$ ($n = 1, 2, 3, 4$) oder

$\sum_{i=1}^6 X_i^n = \sum_{i=1}^6 Y_i^n$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 7$) betreffend. Während die Entwicklungen

meistenteils algebraischer Natur sind, scheint die eigentliche Zielsetzung des Verf. mehr zahlentheoretischer Natur zu sein, da seine numerischen Beispiele durchweg ganzzahlige Lösungen der Relationen bringen. — In einer Schlußnote weist Chowla darauf hin, daß in Hardy und Wrights „Introduction to the Theory of Numbers“ (s. dies. Zbl. 20, 292) auf S. 333 erwähnt sei, es sei keine nichttriviale Lösung von $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = y_1^5 + y_2^5 + y_3^5$ (2) in positiven ganzen Zahlen bekannt. Verf. habe für das aus (2) und $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$ bestehende System die Lösung $x_1 = 49$, $x_2 = 75$, $x_3 = 107$; $y_1 = 39$, $y_2 = 92$, $y_3 = 100$ gefunden. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Wahlgren, Agne: Sur l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 = ez^2$. Ark. Mat. Astron. Fys. 27 A Nr 6, 1—26 (1939).

Es sei $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ eine positiv definite Form mit ganzzahligen Koeffizienten, und es sei $(a, b, c) = 1$. Es werden ganze Zahlen x, y, z gesucht, die die Gleichung $f(x, y) = ez^2$ befriedigen. Dabei soll $(x, y) = 1$ sein. Um diese Aufgabe zu lösen, erweist es sich als zweckmäßig, zuerst die Darstellungen von p^m durch $f(x, y)$ zu untersuchen. Dabei ist p/D ($D = b^2 - 4ac$ Diskriminante von $f(x, y)$), ($p =$ ungerade Primzahl oder $p = 2$). Die Darstellungen ergeben abelsche oder sogar zyklische Gruppen. Bei der Behandlung der obigen Aufgabe wird die folgende Bemerkung benutzt: Es sei p_j/D , $(q_i, D) = 1$; $M = \prod q_i^{r_i} \prod p_j^{s_j}$ und $M = f(x, y)$ lösbar. Dann werden q_i und $p_j^{s_j}$ auch durch jene Formen dargestellt, die dieselbe Diskriminante D wie $f(x, y)$ haben.

Hofreiter (Wien).

Hua, Loo-Keng: On a system of diophantine equations. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 312—313 (1940).

Verf. kündigt ohne Beweis Sätze über die Lösbarkeit des diophantischen Systems $x_1^k + \dots + x_s^k = N_k$ ($k = 1, \dots, n$) (für $s \geq s_1(n)$, $s_1(n) \sim 7n^2 \log n$) und über die asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen (für $s \geq s_0(n)$, $s_0(n) \sim 4,14n^3 \log n$)

(vgl. auch Mardjanichvili, dies. Zbl. 21, 295) an. Analog für $x_1, \dots, x_s = \text{Primzahlen}$. — Die Sätze sind wahrscheinlich etwas anders gemeint, als sie ausgesprochen werden. Z. B. wird der erste Satz gegenstandslos, wenn $E_k(n, s) > s^{1-k/n}$ herauskommt; auch wenn E_k von s nicht abhängt, aber groß ist (z. B. $E_k > n^{n-k}$), verliert der Satz jede Bedeutung für Werte von s , die viel größer als s_0 sind (z. B. für alle $s < n^n$). Sollen vielleicht nicht E_k, e_k beliebig nahe an 1 wählbar sein? *Jarník*.

Seitz, Boris: Sur une équation diophantienne en rapport avec le calcul des probabilités. Comment. math. helv. 12, 323—325 (1940).

L'auteur étudie l'équation

$$\frac{u_1}{v_1} + \dots + \frac{u_n}{v_n} = n \frac{u_1 + \dots + u_n}{v_1 + \dots + v_n}$$

du degré $n + 1$ à $2n$ inconnues $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ et donne une infinité de solutions en nombres naturels, quel que soit le nombre $n \geq 1$. *J. F. Koksma*.

Perron, Oskar: Modulartige lückenlose Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln. 1. Mitt. Math. Ann. 117, 415—447 (1940).

Es seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ n reelle Linearformen in x_1, x_2, \dots, x_n mit der Determinante 1. Minkowski vermutete: Das System $|\xi_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) hat genau dann die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, wenn sich die ξ_i ganzzahlig unimodular in die Gestalt $\xi_{i_1} = y_1, \xi_{i_k} = c_{k1}y_1 + \dots + c_{kk-1}y_{k-1} + y_k$ ($k = 2, \dots, n$) transformieren lassen (i_1, \dots, i_n Permutation von $1, \dots, n$). Gibt man eine geometrische Deutung, so kommt man zu dem Problem der lückenlosen gitterförmigen Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln. Diesem Problem hat der Verf. kürzlich zwei Arbeiten gewidmet (dies. Zbl. 22, 202 und 22, 308). Dabei wurde von einer gitterförmigen Anordnung abgesehen. Es ergab sich unter anderem der Satz: Zwei verschiedene Würfel einer lückenlosen Ausfüllung des R_n haben wenigstens eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz. Nun wird vorausgesetzt, daß die Anordnung der Würfel modulartig ist, d. h. wenn W_1 und W_2 zwei (verschiedene oder gleiche) Würfel der Ausfüllung sind, dann soll auch der Würfel $W_1 - W_2$ der Ausfüllung angehören. Modulartige Ausfüllungen sind stets gitterförmig und umgekehrt. Einer modulartigen lückenlosen Ausfüllung gehört der Nullpunktswürfel an. Daher ergibt sich aus obigem Satz: Bei einer modulartigen lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln hat jeder vom Nullpunktswürfel verschiedene Würfel wenigstens eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate. Dieser allgemeine Satz spielt in der ganzen Arbeit eine wesentliche Rolle. — Es sollen die Würfel durch die Koordinaten ihrer Mittelpunkte charakterisiert werden. Einer modulartigen lückenlosen Ausfüllung gehören insbesondere die Würfel

$$W_1: 1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \dots, \alpha_1^n,$$

$$W_2: \alpha_2^2, 1, \alpha_2^3, \dots, \alpha_2^n,$$

$$\vdots$$

$$W_n: \alpha_n^1, \alpha_n^2, \alpha_n^3, \dots, 1$$

an. Dabei liegen die α im Intervall $0 \leq \alpha < 1$ und sind eindeutig bestimmt. Wir sagen W_1, W_2, \dots, W_n bilden die Grundfigur der betrachteten Ausfüllung. Die Produkte

$$\alpha_{\lambda_1}^{\lambda_2} \alpha_{\lambda_2}^{\lambda_3} \dots \alpha_{\lambda_{r-1}}^{\lambda_r} \alpha_{\lambda_r}^{\lambda_1} \quad (\lambda_i \neq \lambda_k \text{ für } i \neq k)$$

heißen Zyklen. Die Minkowskische Vermutung ist gleichbedeutend mit der Aussage: Bei jeder modulartigen lückenlosen Ausfüllung des R_n mit Würfeln sind in der Grundfigur alle Zyklen gleich 0. Sehr leicht gelingt der Nachweis, daß in einer Grundfigur des R_n alle zweigliedrigen Zyklen gleich 0 sind. Ob auch die drei- und mehrgliedrigen Zyklen einer Grundfigur verschwinden, ist für beliebige n noch nicht bekannt. Der Verf. leitet noch einige Sätze ab, die sich für beliebiges n formulieren lassen und im wesentlichen dazu dienen, Induktionsschlüsse zu ermöglichen. Aus den abgeleiteten Hilfssätzen ergibt sich sofort die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung für

$n = 2, 3, 4$ und 5. Der Nachweis für $n = 6$ ist noch einfach. Die Beweise für $n = 7$ und 8 erfordern hier aber leider noch sehr lange, wenn auch nicht schwierige Betrachtungen. Im R_7 wird gezeigt, daß alle 3- und 4-gliedrigen Zyklen verschwinden, im R_8 wird gezeigt, daß alle 3-, 4- und 5-gliedrigen Zyklen verschwinden. Daraus und aus den zuerst abgeleiteten Sätzen ergibt sich, daß alle Zyklen im R_7 bzw. im R_8 verschwinden und damit die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung für $n = 7$ und 8.

Hofreiter (Wien).

Jarník, Vojtěch: Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre. Čas. mat. fys. **69**, 57—60 (1940).

Es sei $r \geq 4$ ganz, $a = (a_1, \dots, a_r)$ ein Punkt mit $a_1 > 0, \dots, a_r > 0$. Für $x > 0$ sei $V_a(x)$ das Volumen, $A_a(x)$ die Gitterpunktsanzahl des r -dimensionalen Ellipsoids $a_1 u_1^2 + \dots + a_r u_r^2 \leq x$. Verf. untersucht den Gitterrest $P_a(x) = A_a(x)$

$- V_a(x)$ und dessen Mittelwert $M_a(x) = \int_0^x P_a(y) dy$ und zeigt u. a., daß für beliebiges $f(x)$ mit $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ die Menge derjenigen Punkte a , für die

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1}} f(x) = \infty; \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{M_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}} (\log x)^{3r+3}} f(x) = 0 \quad (r \geq 4);$$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}} f(x) = \infty; \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}} f(x) = -\infty \quad (r > 4)$$

gilt, nicht leer ist; ihre Komplementärmenge, im besonderen auch die Menge sämtlicher a , ist sogar von erster Kategorie.

J. F. Koksma (Amsterdam).

Jarník, Vojtěch: Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 5. Abh. Čas. mat. fys. **69**, 148—174 (1940).

Für $x > 0$ bedeute $V(x)$ das Volumen des Ellipsoids $\sum_{\mu, \nu=1}^r c_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \leq x$ ($c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$

ganz, $r > 2$) und $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte (u_1, \dots, u_r) in diesem Ellipsoid. Es sei $P(x) = A(x) - V(x)$. Verf. zeigt dann, daß es eine (von ihm explizite dargestellte) nur von den Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ abhängige Zahl $H > 0$ gibt, so daß

$$\int_0^x P^2(y) dy = H x^2 \log x + O(x^2 \log^{\frac{1}{2}} x) \quad \text{für } r = 3,$$

$$\int_0^x P^2(y) dy = H x^{r-1} + O(g(x)) \quad \text{für } r > 3,$$

mit $g(x) = x^{1/2} \log x$ ($r = 4$), $g(x) = x^3 \log^2 x$ ($r = 5$), $g(x) = x^{r-2}$ ($r > 5$). Diese O -Abschätzung ist für $r > 5$ definitiv. Methodisch ist die Arbeit als eine Weiterentwicklung der in dies. Zbl. **1**, 130 und **20**, 203 referierten Arbeiten zu betrachten.

J. F. Koksma (Amsterdam).

Sokolín, A.: Concerning a problem of Radó. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 871—872 (1940).

Es sei in der Ebene eine endliche Anzahl von Quadraten gegeben, deren Seiten den Achsen x, y parallel sind. Die von den Quadraten bedeckte Fläche habe den Inhalt J . Man kann gewisse Quadrate weglassen, so daß die übrigbleibenden Quadrate keinen Punkt gemeinsam haben und eine Fläche vom Inhalt $J' \geq \frac{1}{2} J$ bedecken. Dies zeigt der Verf. mit Hilfe eines Satzes aus der Geometrie der Zahlen, den man Blichfeldt verdankt [Trans. Amer. Math. Soc. **15** (1914)].

Hofreiter (Wien).

Bullig, G.: Zur Kettenbruchtheorie im Dreidimensionalen (Z I). Abh. math. Semin. Hansische Univ. **13**, 321—343 (1940).

Ein von Minkowski [Zur Theorie der Kettenbrüche. Ges. Abh., **1**, 278. Leipzig und Berlin 1911 oder Ann. Ecole norm. (3) **13** (1896)] für dreidimensionale Punktgitter definiertes Iterationsverfahren wird hier für folgende allgemeinere Punktmengen M studiert: M liegt im ersten Oktanten R ($x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$) des dreidimensionalen Euklidischen Raumes; M hat keinen Häufungspunkt; zu jedem c und jedem i ($1 \leq i \leq 3$) gibt es in M höchstens einen Punkt mit $x_i = c$; zu jedem $\varepsilon > 0$

und jedem Paar $i \neq k$ gibt es in M einen Punkt mit $x_i < \varepsilon$, $x_k < \varepsilon$. Wir betrachten Quader Q : (1) $0 < x_i < c_i$ ($i = 1, 2, 3$); die Begrenzung $B(Q)$ in R besteht aus drei Seitenflächen und enthält drei Kanten und eine Ecke. Enthält Q keinen Punkt von M , liegen aber auf $B(Q)$ drei Punkte von M (also im Innern jeder Seite genau ein Punkt), so heiße Q ein Quader 3. Art. Es sei V die Vereinigungsmenge aller Quader 3. Art; die Begrenzung $B(V)$ (in R) bekommt man wie folgt: (1) sei ein Quader 3. Art, auf dessen Seiten die Punkte (a_{h1}, a_{h2}, a_{h3}) ($h = 1, 2, 3$) von M liegen ($a_{ik} < a_{kk} = c_k$ für $i \neq k$). Man bilde die drei „2-Intervalle“ $x_i = a_{ii}$, $a_{ik} \leq x_k < a_{kk}$, $a_{il} \leq x_l < a_{ll}$, die drei „1-Intervalle“ $x_i = a_{ii}$, $x_k = a_{kk}$, $\max(a_{il}, a_{kl}) \leq x_l < a_{ll}$ und das „0-Intervall“ (Ecke von Q) $x_1 = a_{11}$, $x_2 = a_{22}$, $x_3 = a_{33}$. Dies führe man für alle Quader 3. Art durch. Zwei solche Intervalle sind genau dann nicht fremd, wenn sie dieselbe Dimension und denselben Anfangspunkt (= Punkt mit kleinsten Koordinaten) haben. Die Vereinigungsmenge aller n -Intervalle mit demselben Anfangspunkt heiße eine n -Ecke. $B(V)$ ist dann die disjunkte Summe aller 0-, 1- und 2-Ecken. Jede 2-Ecke ist einem offenen Simplex homöomorph und enthält zu jeder Koordinatenebene ein paralleles 2-Intervall; sie wird von 0- und 1-Ecken berandet. Jede 1-Ecke besteht aus zwei senkrechten 1-Intervallen und wird von zwei 0-Ecken berandet. Von zwei solchen 0-Ecken, die eine 1-Ecke beranden, sagt man, daß jede von ihnen aus der anderen durch eine Operation Ω entsteht. Jede 1- oder 2-Ecke ist durch die auf ihrem Rande vorkommenden 0-Ecken bestimmt. Jede 1-Ecke (bzw. 0-Ecke) liegt auf dem Rande von genau zwei 2-Ecken (bzw. von drei 1-Ecken und von drei 2-Ecken). Auf jede 0-Ecke kann man also drei verschiedene Operationen Ω anwenden. Durch eine geeignete Aufeinanderfolge dieser Operationen kann man aus einer beliebigen 0-Ecke in jede andere gelangen (dieser Satz stammt für Punktgitter von Minkowski). Ein besonders anschauliches Bild der 0-, 1- und 2-Ecken bekommt man mit Hilfe der Abbildung $y_i = \log(x_i(x_1 x_2 x_3)^{-1})$ ($i = 1, 2, 3$) von $B(V)$ auf die Ebene $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.
Jarník (Prag).

Bullig, G.: Anwendung eines Iterationsverfahrens für diskrete Punktmengen auf Gitter (Z 2). Mitt. math. Ges. Hamburg 8, Tl. 2, 164—187 (1940).

Wegen Z 1 vgl. vorsteh. Ref. Es sei G ein Punktgitter im dreidimensionalen euklidischen Raume; G^* sei das Punktgitter, welches entsteht, indem man die äußeren Produkte von je zwei Vektoren aus G vom Nullpunkt aus abträgt. Der Nullpunkt sei der einzige auf den Koordinatenebenen liegende Punkt von G und von G^* . Dann erfüllt die Menge M der im Oktanten (1) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ liegenden Punkte von G die Bedingungen von Z 1. Wie in Z 1 heiße ein Quader $0 < x_i < c_i$ ($i = 1, 2, 3$) extrem (3. Art), wenn er im Innern keinen, im Innern jeder im Oktanten (1) gelegenen Seitenfläche genau einen Punkt von M enthält. Dann gilt (bitte zeichnen): Sind a_1, a_2, a_3 (die Koordinaten von a_n bezeichne man mit a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}) drei Punkte von M mit (2) $0 < a_{rq} < a_{qq}$ ($r \neq q$), so ist der Quader $0 < x_i < a_{ii}$ dann und nur dann extrem, wenn a_1, a_2, a_3 eine „normierte Basis“ von G bilden. Dabei heißt eine Basis a_1, a_2, a_3 von G normiert, wenn (2) gilt und wenn $a_l \in N_l$ ist ($l = 1, 2, 3$), wo N_l folgendermaßen definiert wird: Sind i, k die von l verschiedenen unter den Zahlen 1, 2, 3, $a_{il} < a_{kl}$, so besteht N_l aus allen Punkten (x_1, x_2, x_3) , für welche entweder $0 < x_i \leq a_{ki}$, $0 < x_k < a_{kk} - a_{ik}$ oder $a_{ki} < x_i < a_{ii}$, $0 < x_k < a_{kk}$ gilt. — Es wird weiter angegeben, wie sich die Ω -Prozesse (die jeden extremen Quader in jeden anderen sukzessive zu überführen gestatten, vgl. Z 1) in unserem Falle berechnen lassen. — Ein numerisches Beispiel wird durchgerechnet.
Jarník (Prag).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Pospíšil, Bedřich: Über die meßbaren Funktionen. Math. Ann. 117, 327—355 (1940).

Nach Stone (dies. Zbl. 14, 340) ist jeder (abstrakte) Boolesche Ring A einem Mengenkörper K_A isomorph, und umgekehrt kann ein beliebiger Mengenkörper als

Boolescher Ring angesehen werden. Es sei nun $\varphi(j)$ eine Abbildung des Systems aller Intervalle j der Zahlgeraden auf Elemente von A bzw. auf Mengen von K_A . Wir bezeichnen der Reihe nach mit (1), ..., (3) folgende Eigenschaften: (1) $\varphi(j_1 + j_2) = \varphi(j_1) + \varphi(j_2)$, $\varphi(j_1 j_2) = \varphi(j_1) \varphi(j_2)$; (2) $\varphi(j) = e_A$ für passendes j , wo e_A Einselement von A ; (2*) $\varphi(j) = e_A$ für passendes kompaktes j ; (3) Besitzen die abzählbar vielen Intervalle j_v einen leeren Durchschnitt, so haben auch die $\varphi(j_v)$ einen leeren Durchschnitt. Je nachdem (1) bzw. (1), (2) bzw. (1), (2*) bzw. (1), (2), (3) erfüllt ist, heiße $\varphi(j)$ eine Verteilung in A bzw. auf A bzw. beschränkt bzw. stetig. Beispiele von Verteilungen sind die Umkehrfunktionen von bezüglich K_A meßbaren Funktionen. Eine der in vorliegender Arbeit vor allem behandelten Fragen ist nun die, ob alle stetigen Verteilungen durch meßbare Funktionen erzeugt werden können. Dies ist dann (und im allgemeinen auch nur dann) der Fall, wenn man Funktionen, die sich lediglich auf einer Nullmenge unterscheiden, als gleich ansieht. Ist z. B. f eine bezüglich K_A meßbare Funktion, sind ferner unter den Mengen von K_A sog. Nullmengen ausgezeichnet, die ein Ideal I in A bilden, und übt man auf A einen Homomorphismus mit dem Kern I aus, so wird $f^{-1}(j)$ auf ein Element $\varphi(j)$ von A abgebildet, wobei „gleich“ f gleiche φ entsprechen. Wie gesagt, gilt auch in bestimmtem Sinne das Umgekehrte. — Wir nennen in diesem Zusammenhang noch folgendes Ergebnis. Bilden die meßbaren Mengen einen σ -Körper und ist jede Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine solche, so ist jede beschränkte stetige Verteilung auf A einer meßbaren Funktion zugeordnet. — Allerdings hat es dann keinen Sinn mehr, von den „Werten“ der betreffenden (meßbaren) Funktion zu sprechen; einen Ersatz für die Funktionen bilden da die sog. Charaktere, die allgemein für Verteilungen erklärt werden, wie folgt: Es sei Φ eine Menge von Verteilungen φ in A , ferner h eine auf Φ erklärte reelle (eindeutige) Funktion derart, daß für keine (offene) Umgebung \tilde{j} von $h(\varphi)$ gilt: $\varphi(\tilde{j}) = 0$, und daß $h(\varphi_1 + \varphi_2) = h(\varphi_1) + h(\varphi_2)$; $h(\varphi_1 \varphi_2) = h(\varphi_1) \cdot h(\varphi_2)$. Diese Charaktere bilden für die Betrachtung ein methodisch wichtiges Hilfsmittel. — Von den sonst behandelten Fragestellungen erwähnen wir die Frage nach der „Anzahl“ der Charaktere für gegebene Verteilungen. Beispiel: Als meßbare Mengen seien erklärt alle Mengen von nichtnegativen ganzen Zahlen, als Nullmengen unter diesen alle endlichen Mengen. Dann stimmen die meßbaren Funktionen mit den Zahlenfolgen überein und jeder Charakter ordnet einer Zahlenfolge einen bestimmten ihrer Häufungswerte zu. Es gibt genau $\exp(c)$ Charaktere von Zahlenfolgen, unter c die Mächtigkeit des Kontinuums verstanden. — Am Schluß werden einige algebraische und metrische Eigenschaften von Verteilungen erläutert und insbesondere die stetigen Verteilungen auf gewissen Ringen zu Banachschen Räumen erfaßt, welche lineare Bilder gewisser Räume von Zahlenfolgen sind.

Haupt (Erlangen).

Moore, R. L.: Concerning accessibility. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 648—653 (1939).

Es wird von einigen Folgerungen und der Tragweite der Axiome 0, 1, 2 des Buches des Verf. (vgl. Moore, Foundations of Point Set Theory, 1932; dies. Zbl. 5, 54) und einigen anderen Postulaten gehandelt. Axiom 0 besagt, daß jedes Gebiet eine Punktmenge ist. Das Axiom 1 postuliert das Bestehen der berdeckungsstze und des Cantorsche Satz der Punktmengentheorie. Das letzte Axiom fordert für jeden Punkt eines Gebietes das Vorhandensein eines nicht ausartenden zusammenhängenden Bereiches, der P enthält und ganz in dem Gebiet liegt. Nehmen wir den Satz A an: Ist die Begrenzung β eines zusammenhängenden Bereiches D eine kompakte Punktmenge, so gibt es ein kompaktes Kontinuum, das β enthält und in $D + \beta$ liegt. — Falls wir zu 0, 1, 2 auch folgendes Axiom K hinzunehmen: Ist P ein Punkt eines Gebietes R , so gibt es einen Bereich, der P enthält, in R liegt und von einer kompakten Punktmenge begrenzt ist, so können wir sagen, daß in einem Raum, in dem 0, 1, 2 und K bestehen, auch der Satz A gilt, während es Räume gibt, wo 0, 1, 2 besteht, aber A falsch ist, selbst wenn ein schwächeres Axiom als K besteht. — Es ist

noch folgender Satz zu bemerken: Ist in einem Raum, wo $0, 1, 2$ und K bestehen, L eine kompakte stetige Kurve ohne Kondensationskontinuum, M eine stetige Kurve und N eine Teilmenge von M , deren Begrenzung Teilmenge von L ist, so ist N eine stetige Kurve.

L. Egged (Budapest).

Kunugui, Kinjiro: Sur un problème de M. E. Szpilrajn. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 73—78 (1940).

Soit M un ensemble situé dans le plan OXY ; désignons par Δ l'ensemble des points x de l'axe OX tels que l'intersection avec M de la droite parallèle à l'axe OY menée par x est un ensemble F_σ non vide. L'auteur prouve que, M étant un ensemble borelien, Δ est un complémentaire analytique. En particulier, lorsque toutes les intersections de M avec les droites parallèles à l'axe OY sont des ensembles F_σ , la projection de M sur l'axe OX est un ensemble borelien.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Maximoff, Isaie: Sur la séparabilité d'ensembles. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 22, 384—389 (1940).

L'auteur donne quelques extensions des théorèmes fondamentaux de Lusin, Sierpiński et Novikoff sur la séparabilité d'ensembles projectifs. Les classes d'ensembles qu'il envisage s'obtiennent des classes projectives correspondentes au moyen de sommations transfinies.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Saks, S.: Sur un théorème de P. Novikoff. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 373—377 (1940).

Soit E un espace métrique, $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ une fonction continue d'une infinité dénombrable de points variables $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de l'espace E et dont les valeurs appartiennent à E . Φ est une fonction de Novikoff, lorsque le point $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ n'appartient jamais à la suite $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. L'auteur prouve que l'existence d'une telle fonction Φ entraîne que l'espace E contient un ensemble parfait et compact. (C'est une extension d'un théorème récent de Novikoff qui ne concerne qu'un espace tout particulier.) Lorsque E est un ensemble de nombres réels, l'existence d'une fonction Φ de Novikoff équivaut à l'existence d'un sous-ensemble parfait de E dont chaque point est frontière pour E .

Bedřich Pospíšil.

Kozloff, Zoé: Sur la séparabilité multiple. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 110—114 (1940).

Etant donné un nombre fini d'ensembles d'un certain type sans points communs, il s'agit d'en trouver des sur-ensembles d'un type prescrit sans points communs. L'auteur donne une base systématique pour les questions liées à cette idée et signale les résultats qu'il a obtenus sur le lien mutuel entre divers théorèmes de séparabilité multiple.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Moore, R. L.: Concerning the open subsets of a plane continuum. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 24—25 (1940).

Für nicht beschränkte Kontinua gilt in der Ebene der Satz: Ist K eine abgeschlossene Punktmenge, G eine abzählbare Menge von paarweise elementfremden Kontinuen und $\sum G \cdot K = 0$, während $\sum G + K$ ein Kontinuum ist, so ist jedes Element von G eine Komponente von $\sum G$. Mit Hilfe einer Konstruktion von Mazurkiewicz zeigt Verf., daß es in der Ebene auch Kontinua gibt, die eine abzählbare abgeschlossene Punktmenge K enthalten, so daß $M - K$ abzählbar viele Komponenten hat, aber K keinen Limespunkt einer dieser Komponenten enthält.

L. Egged (Budapest).

Morse, Anthony P., and John F. Randolph: Gillespie measure. Duke math. J. 6, 408—419 (1940).

Verff. definieren ein lineares Maß ebener Punktmengen, und zwar folgendermaßen: A sei eine ebene Menge, ΣU_k eine Überdeckung von A durch konvexe Mengen, deren Durchmesser $< \rho$ sei; $u(U_k)$ sei der Umfang von U_k . Verff. bilden $G_\rho(A) = \inf \Sigma \frac{1}{2} u(U_k)$ und bezeichnen $G^*(A) = \lim_{\rho \rightarrow 0} G_\rho(A)$ als äußeres Gillespiemaß von A . Dieses Maß ist eine reguläre Maßfunktion im Sinne Carathéodorys. Für $G^*(A) < \infty$ ist A dann und nur dann nach Gillespie meßbar, wenn A nach Carathéodory

meßbar ist, und es gilt $L^*(A) \leq G^*(A) \leq \frac{\pi}{2} L^*(A)$, wobei L^* das äußere Carathéodorysche Maß bedeutet. Diese Ungleichung kann nicht weiter verschärft werden. Bedeutet m^* das äußere lineare Lebesguesche Maß und ist A_x die Projektion von A auf die x -Achse, A_y die Projektion von A auf die y -Achse, so kann $L(A) = m(A_x) = m(A_y)$ sein, eine gewisse Inkonsistenz des Carathéodoryschen Maßes, die das Gillespiemaß nicht aufweist, denn es gilt $G^*(A) \geq \sqrt{(m^*(A_x))^2 + (m^*(A_y))^2}$. Für rektifizierbare Kurven stimmt das Gillespiemaß mit der Länge überein. — Mit Benutzung desselben Grundgedankens kann auch ein 2-dimensionales Maß im 3-dimensionalen Raum definiert werden (Bezeichnung $G^{*(2)}$). Verff. beweisen, daß für $G^*(A) < \infty$ die Gleichungen $G_*^{(2)}(B) = h \cdot G_*(A)$ und $G^{*(2)}(B) = h \cdot G^*(A)$ gelten, wobei A eine ebene Punktmenge ist und B die Menge der (x, y, z) mit $(x, y) \in A$, $0 \leq z \leq h$ bedeutet.

Artur Bischof (Berlin).

Izumi, Shin-ichi: An abstract integral. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 21—25 (1940).

X sei irgendeine Menge, (\mathfrak{X}) ein System von Teilmengen von X , das mit E_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) auch $\sum E_\nu$ und $X - E_\nu$, also auch ΠE_ν enthält und in dem eine nichtnegative, totaladditive Funktion mE definiert ist, \mathfrak{X} sei ein Teilsystem von \mathfrak{X} , das mit E, E_1 auch $E + E_1$ und $X - E$, also auch $E \cdot E_1$ enthält und in dem eine nichtnegative, additive Funktion vE definiert ist. Es sei $f(x)$ eine endliche Funktion, $M(f(x) < k) \in \mathfrak{X}$ für alle k und $vE > 0$. $\Phi'(E, \lambda)$ sei die obere Grenze aller y mit $m(E \cdot M(f(x) < y)) \leq \lambda \cdot vE$, wo $\lambda > 0$ sein soll. $\Phi(E, \lambda)$ sei die untere Grenze aller y mit $m(E \cdot M(f(x) < y)) = m(E \cdot M(f(x) < \Phi'))$, wenn diese untere Grenze endlich ist; andernfalls sei $\Phi(E, \lambda) = \Phi'(E, \lambda)$. Zu jeder Einteilung δ von X in paarweise fremde $E_\nu \in \mathfrak{X}$ mit $vE_\nu > 0$ bildet Verf. $\bar{M}_\lambda(\delta) = \sum \Phi(E_\nu, \lambda) \cdot vE_\nu$ und betrachtet dann $\bar{M} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{\delta} \bar{M}_\lambda(\delta)$. Ähnlich wird ein \underline{M} erklärt. Im Falle $\bar{M} = \underline{M}$ wird diese Zahl durch $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) - \int f(x) dv$ bezeichnet. Verf. stellt anschließend Betrachtungen an über das Verhältnis dieses Integralbegriffs zu anderen und überträgt zwei Sätze von S. Bochner auf den neuen Integralbegriff.

Artur Bischof (Berlin).

Izumi, Shin-ichi: An abstract integral. 2. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 87—89 (1940).

E sei eine beliebige Menge, \mathfrak{X} ein System von Teilmengen von E , das mit A und A_1 auch $A + A_1$ und $E - A$, also auch AA_1 enthält und in dem eine nichtnegative, additive Funktion μA definiert ist. Die $x_{n\nu}$ ($n = 1, 2, \dots, \nu = 1, 2, \dots, n$) genügen der $(C, 1')$ -Bedingung, wenn für jedes $A \in \mathfrak{X}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n/n) = \mu A$ ist, wo M_n die Anzahl der $x_{n\nu}$ (n fest, $\nu = 1, \dots, n$) in A bedeutet. E_1 sei ein linearer Raum, in dem Grenzwerte sinngemäß definiert sind. $f(x)$ sei eine in E definierte Funktion, deren Werte Punkte von E_1 sind. Wenn dann für alle $x_{n\nu}$, die der $(C, 1')$ -Bedingung genügen, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(x_{n\nu})$ existiert und unabhängig von der Wahl der $x_{n\nu}$ ist, so heißt $f(x)$ \mathfrak{R}' -integrierbar; der Wert dieses \lim wird mit $(\mathfrak{R}') - \int f(x) d\mu$ bezeichnet. Fordert man von \mathfrak{X} noch $\sum A_i \in \mathfrak{X}$ für $A_i \in \mathfrak{X}$ ($i = 1, 2, \dots$), setzt man E_1 als metrisch und μ als totaladditiv voraus und ersetzt man die $(C, 1')$ -Bedingung durch die $(C, 2')$ -Bedingung, so erhält man ein vom Verf. mit $(\mathfrak{R}') - \int f(x) d\mu$ bezeichnetes Integral. Die $(C, 2')$ -Bedingung lautet: Für jedes $A = M(f(x) \in K)$, wo K eine Kugel in E_1 ist, soll $\lim_{n \rightarrow \infty} (N_n/n) = \mu A$ sein; N_n bedeutet die Anzahl der $x_{n\nu}$ (n fest, $\nu = 1, \dots, n$) in A . Existenz von μA für jede Kugel K (\mathfrak{X} -Meßbarkeit von $f(x)$) hat man vorauszusetzen. Die Literaturangaben des Verf. sind zum Teil unzuverlässig.

Artur Bischof.

Bochner, S.: Integration and differentiation in partially ordered spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **26**, 29—31 (1940).

Let S be a partially ordered linear space satisfying the regularity condition of L. Kantorovitch (this Zbl. **16**, 405). Beside the Lim defined by the semi-order

relation, no topology such as Banach norm is presupposed in S . The notion of integrable functions $f(t)$ on $(0, 1)$ to S is defined as a certain limit of step functions. The property that every monotone function on $(0, 1)$ to S is derivable almost everywhere is implied by the axiom (L): there exists on S a numerable set of continuous linear positive functionals $L_n(a)$ such that $L_n(a) > 0$ for all n implies $a > 0$ and that, for $a_1 \leq a_2 \leq \dots$, $\lim_{m \rightarrow \infty} L_n(a_m) < +\infty$ for all n implies $\sup_m a_m < +\infty$. Axiom (L) allows, in particular, to obtain ergodic theorem of G. D. Birkhoff's type. These results are stated without proof.

Kôzaku Yosida (Osaka).

Denjoy, Arnaud: Totalisation simple des fonctions ramenée à celle des séries. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 73—76 (1940).

L'auteur ramène la totalisation simple d'une fonction $f(x)$ à la totalisation d'une certaine série attachée à $f(x)$. L'emploi de l'ordonnance transfinie de la seconde classe γ joue un rôle essentiel.

G. Alexits (Budapest).

Analysis.

Allgemeines:

● Dölp, H.: Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten. Neu bearb. v. Eugen Netto. 19. Aufl. Berlin: Alfred Töpelmann 1940. 214 S. u. 18 Fig. RM. 1.95.

Die 1. Auflage dieses bekannten Lehr- und Übungsbuches erschien 1869. Der Verf. ist noch vor Erscheinen der 2. Auflage (1874) gestorben. Der Text des Buches, so wie es heute vorliegt, stammt im wesentlichen noch aus dem vergangenen Jahrhundert (Überarbeitung durch Netto, 7. Auflage 1898). Der Text der „Grundzüge“ ist daher ziemlich veraltet und teilweise fehlerhaft. Besonders revisionsbedürftig erscheinen u. a. die Ausführungen über „unendlich kleine Größen“ und Grenzbegriff (S. 6), über gemischte partielle Differentialquotienten und „gleichzeitige Grenzübergänge“ (S. 51f.), über das bestimmte Integral (S. 172f.) und über den Übergang zur homogenen Kurvengleichung (S. 179, 200). Hoffentlich wird vor der nächsten Auflage dieses jedenfalls guten und nützlichen Buches eine gründliche Überarbeitung erfolgen.

W. Gröbner (Berlin).

● Sokolnikoff, I. S.: Advanced calculus. New York: McGraw-Hill 1939. 446 pag. \$ 4.—.

Usai, Giuseppe: Proprietà combinatoria in certe medie. Esercitazioni Mat., II. s. **12**, 129—133 (1940).

Das arithmetische, geometrische, harmonische und quadratische Mittel $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ von $x_1 \dots x_n$ haben folgende Eigenschaft: Bildet man in jeder der $\binom{n}{k}$ Kombinationen der x_i zu je k das Mittel und dann das Mittel der so erhaltenen Mittel, so ist dies gleich dem Mittel der $x_1 \dots x_n$. Dies wird bewiesen.

Harald Geppert (Berlin).

Stollow, S.: Sur l'inversion des transformations dont le déterminant fonctionnel s'annule sans changer de signe. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **10**, 19—22 (1940).

Durch die Transformation (1) $X = P(x, y)$, $Y = Q(x, y)$ werde das Gebiet \mathfrak{G} der x, y -Ebene in eine Punktmenge der X, Y -Ebene übergeführt. Dabei seien folgende Voraussetzungen erfüllt: (a) $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ sind in \mathfrak{G} reguläre analytische Funktionen der reellen Veränderlichen x, y . (b) Die Funktionaldeterminante $\Delta = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(x, y)}$ ist ≥ 0 in \mathfrak{G} , jedoch $\neq 0$. (c) Ist B ein einfacher Bogen in einer Menge E , in der $\Delta = 0$ ist, so enthält das Bild von B in der X, Y -Ebene stets mehr als einen Punkt. Dann ist die Transformation (1) auch in den Punkten von E umkehrbar eindeutig, abgesehen vielleicht von gewissen isoliert liegenden Ausnahmepunkten.

Kamke.

Nieland, L. W.: Über eine Transformationsmethode. *Mathematica, Zutphen* B 9, 1—3 (1940) [Holländisch].

Verf. beweist die Formel

$$\int_0^{\infty} f \left| x - \frac{\gamma}{x} \right| dx = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (\gamma > 0)$$

und ermittelt dadurch eine Reihe von bestimmten Integralen. *G. Schrutka* (Wien).

Ionesco, D. V.: Quelques applications d'une formule de G. Darboux. *Bul. Soc. şti. Cluj* 9, 446—452 (1940).

L'A. dà alcune applicazioni della formula di Cavalieri-Torricelli (cfr. anche Ionesco, D. V., questo Zbl. 22, 124) al calcolo di aree, baricentri e momenti d'inerzia.

Luigi Beretta (Florenz).

Ciorănescu, Nicolas: Quelques formules de moyenne. *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest* 10, 27—31 (1939).

En suivant une méthode donnée dans sa note [C. R. Acad. Sci. Paris 206, 1782; ce Zbl. 19, 10] l'au. donne quelques formules de moyenne qui font intervenir la dérivée première d'une fonction $f(x)$ continue ainsi que sa dérivée dans un intervalle (a, b) . Citons par exemple la formule suivante:

$$\int_a^b [(x-a)^k - (x-b)^k] f(x) dx = \frac{k(b-a)^{k+1}}{(k+1)(k+2)} f'(\zeta), \quad a < \zeta < b, \quad k \geq 1.$$

N. Obrechhoff (Sofia).

Fastperiodische Funktionen:

Raikov, D.: Positive definite functions on discrete commutative groups. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s.* 27, 324—328 (1940).

\mathfrak{G} sei eine beliebige diskrete abelsche Gruppe. Eine komplexe Funktion $f(g)$, $g \in \mathfrak{G}$, heißt positiv definit, wenn für irgendwelche Elemente $h_1, \dots, h_m \in \mathfrak{G}$ und beliebige

komplexe Zahlen ξ_1, \dots, ξ_m stets $\sum_{i,j=1}^m f(h_i - h_j) \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0$ gilt. X sei die Gruppe

der Charaktere von \mathfrak{G} , $\bar{B}\mathfrak{G}(X)$ sei die Menge aller derjenigen fastperiodischen Funktionen auf X , die gleichmäßig konvergente Grenzfunktionen von Linearkombinationen von Charakteren von \mathfrak{G} sind. $\bar{B}\mathfrak{G}(X)$ ist auch als der Raum aller stetigen Funktionen auf X erklärbar, die Stetigkeit im Sinne der bekannten Topologie in X erklärt. Es wird bewiesen, daß jede positiv definite Funktion $f(g)$ die Form $L\{g(\chi)\}$ hat, $\chi \in X$, wobei $L(\varphi)$ ein lineares positives Funktional auf $B\mathfrak{g}(X)$ ist, d. h. $L\{\varphi\} \geq 0$, wenn $\varphi(\chi) \geq 0$ für alle $\chi \in X$. Auch die Umkehrung gilt. Daraus folgt weiter, daß $f(g) = \int_X g(\chi) F(d\chi)$ wird, wobei $g(\chi) = \chi(g)$, $g \in G$, $\chi \in X$ ist und $F(\Delta)$ eine totaladditive,

nichtnegative und in der Topologie von X von oben stetige Mengenfunktion auf X ist. Dual dazu gilt, daß jede stetige positiv definite Funktion $f(\chi)$ auf X sich in eine absolut konvergente Reihe mit positiven Koeffizienten in den durch die Gruppenelemente $g \in G$ erzeugten Charakteren $g(\chi)$ entwickeln läßt.

G. Köthe.

Iyanaga, Shôkichi, and Kunihiko Kodaira: On the theory of almost periodic functions in a group. *Proc. imp. Acad. Jap.* 16, 136—140 (1940).

Es wird ein neuer einfacher Beweis für die Existenz des Mittelwertes einer fastperiodischen Funktion auf einer Gruppe gegeben [vgl. J. v. Neumann, *Trans. Amer. Math. Soc.* 36 (1934); dies. Zbl. 9, 349; und W. Maak, *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.* 11 (1936); dies. Zbl. 13, 111].

G. Köthe (Münster i. W.).

Levitan, B.: On functions with pure point spectra. *Commun. Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s.* 16, 89—100 u. engl. Zusammenfassung 100—101 (1940) [Russisch].

Eine stetige Funktion $V(\alpha)$ heißt nach Verf. ein gebrochener Linienzug oder eine

reine Punktfunktion (r.P.F.) im Intervall $[a, b]$, wenn bei beliebigem positivem ε und δ endlich viele Punkte mit einer Intervallbedeckung von einer Länge $< \delta$ existieren, derart, daß die totale Schwankung der Ableitung $V'(\alpha)$ auf der Restmenge $< \varepsilon$ ist. Eine Funktion $f(x)$ besitzt ein reines Punktspektrum, wenn ihre zweite Fouriertransformierte (Klasse \mathfrak{I}_2 , vgl. Bochner, Das Fouriersche Integral. Leipzig 1932; dies. Zbl. 6, 110) r.P.F. ist. Es wird bewiesen: Eine Funktion mit reinem Punktspektrum ist fastperiodisch, wenn sie beschränkt und gleichmäßig stetig ist. Nicht jede fastperiodische Funktion besitzt ein reines Punktspektrum. Mit Hilfe des Satzes lassen sich leicht Bedingungen angeben, wann eine in jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergente Folge trigonometrischer Summen gegen eine fastperiodische Funktion konvergiert.

Tautz (Breslau).

Kovanko, A. S.: Sur les systèmes compacts de fonctions presque-périodiques généralisées de W. Stepanoff. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 211—213 (1940).

e étant un nombre positif fixé, appelons distance $\delta^e(f, g)$ des fonctions $f(x)$ et $g(x)$, définies sur $(-\infty, \infty)$ et mesurables, la quantité

$$\text{borne inf}_{0 \leq a < \infty} \left(a + \text{borne sup}_{-\infty < y < \infty} \frac{\text{mes } E_a(y, y + e)}{e} \right)$$

où $E_a(y, y + e)$ désigne la partie commune de l'intervalle $(y, y + e)$ et de l'ensemble E_a des x pour lesquels $|f(x) - g(x)| \geq a$. Les fonctions $f(x)$ presque-périodiques au sens de Stepanoff (S p. p.) se caractérisent par le fait qu'elles sont mesurables et que pour $\varepsilon > 0, e > 0$ quelconques il existe un ensemble relativement dense (par rapport à un certain nombre l) de nombres τ (presque-périodes) tels que $\delta^e(f(x + \tau), f(x)) < \varepsilon$. — L'auteur énonce le théorème suivant: Pour qu'un sousensemble \mathfrak{M} des fonctions S p. p. soit compact au sens de la métrique δ^e (pour tout e fixe) il est nécessaire et suffisant que \mathfrak{M} jouisse des propriétés suivantes: 1. Pour tous les ε, e fixes on peut déterminer des nombres N_0, η tels que pour $N > N_0, h < \eta, f(x) \in \mathfrak{M}$ on ait $\delta^e(f, f_N) < \varepsilon, \delta^e(f(x), f(x + h)) < \varepsilon, f_N$ désignant la fonction qui est égale à $f(x)$ lorsque $|f(x)| < N$ et à $N \cdot \text{sgn } f(x)$ lorsque $|f(x)| \geq N$. 2. Il existe un ensemble relativement dense de nombres τ tels que $\delta^e(f(x + \tau), f(x)) < \varepsilon$ pour tout f de \mathfrak{M} . — Le théorème se généralise aussi pour les fonctions presque-périodiques S^p .

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Artemenko, A.: On positive linear functionals in the space of almost periodic functions of H. Bohr. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 111—113 u. engl. Zusammenfassung 113—114 (1940) [Russisch].

Es kann nur nach dem englischen Auszug berichtet werden. Als Übertragung von gewissen Sätzen von Mathias und Bochner auf fastperiodische Funktionen wird der folgende Satz aufgestellt: Es sei $\varphi(\lambda)$ eine auf der reellen Achse definierte komplexwertige Funktion. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es eine lineare stetige Funktionaloperation $F[f(x)]$, definiert im linearen Raum der stetigen fastperiodischen Funktionen $f(x)$, derart gebe, daß $F[e^{i\lambda t}]$ gleich $\varphi(\lambda)$ sei, ist die folgende: Für beliebige reelle λ_k und komplexe ξ_k ($k = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, 3, \dots$) muß $\sum_{k=1}^n \varphi(\lambda_i - \lambda_k) \xi_i \bar{\xi}_k \geq 0$ sein. Dabei wird die Stetigkeit von F im Sinne der Norm $\|f(x)\| = \sup_x |f(x)|$ verstanden.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged, Ungarn).

Lewitan, B.: Verallgemeinerte Operation der Verschiebung im Zusammenhang mit fastperiodischen Funktionen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 631—634 (1940).

Weyl (Math. Ann. 97, 338—356) beweist den Fundamentalsatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen, indem er zeigt, daß die Lösungen der Gleichung $\lambda \varphi(s) = M_t\{f(s - t)\varphi(t)\}$ reine Schwingungen sind, daß also die Beziehung $\varphi(s + t) = \varphi(s)\varphi(t)$ erfüllt ist. Verf. ersetzt $f(s + t)$ durch $T_t^s f(t)$ (T^s eine Schar gleichmäßig beschränkter Operatoren mit dem Parameter s). $f(s - t)$ wird durch den konjugierten Operator \tilde{T} und der limes M_t durch den Banachschen Limes (Théorie

op. lin. S. 33; dies. Zbl. 5, 209) ersetzt. $f(t)$ ist stetig auf der reellen Achse und die Funktionenscharen $T_s^* f(t) = g_s(t)$, $\tilde{T}_s^* f(t) = h_s(t)$ sind kompakt im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. $f(z)$ heißt dann fastperiodisch in bezug auf die Operatorenschar. Verf. beweist das Analogon der Weylschen Relation $T_s^* \varphi(t) = \varphi(t) \varphi(s)$. Auch hier ist die Parsevalsche Gleichung nach Verf. beweisbar. Schließlich wird ein Beispiel konstruiert.

Tautz (Breslau).

Wintner, Aurel: On an ergodic analysis of the remainder term of mean motions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 126—129 (1940).

Es wird bemerkt, daß die Ableitung $\psi'(t)$ des Winkelargumentes $\psi(t)$ eines Exponentialpolynoms $\sum A_\nu \exp(i(\lambda_\nu t + \alpha_\nu))$ für fast alle Anfangsphasen $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ fast periodisch im Sinne (B) ist. Der Beweis wird unter der Voraussetzung geführt, daß die λ_ν linear unabhängig sind.

E. Hopf (Leipzig).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Giuliano, Landolino: Sull'unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 221—227 (1940).

Mit den Methoden, die L. Tonelli im Falle einer einzigen Differentialgleichung mit Erfolg angewandt hat, und die neuerdings von anderen Autoren wiedergefunden wurden (vgl. McShane, dies. Zbl. 22, 222), beweist Verf. den folgenden Eindeutigkeitsatz: Vorgegeben ist das Differentialsystem (1) $y_i' = f_i(x; y_1 \dots y_n)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), worin die f_i innerhalb des Rechtecks $R: |x - \bar{x}| \leq \alpha$, $|y_i - \bar{y}_i| \leq \beta$ ($i = 1 \dots n$) definiert seien; $\omega(u)$ und $M(x)$ seien zwei Funktionen derart, daß 1. $\omega(u)$ stetig, für

$u > 0$ positiv und für jedes $u_0 > 0$ $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^{u_0} \omega^{-1}(u) du = 0$ ist; 2. $M(x)$ in $(\bar{x}, \bar{x} + \alpha)$ definiert, im Intervall $(x_1, \bar{x} + \alpha)$, wobei $\bar{x} < x_1 < \bar{x} + \alpha$, Lebesgue-integrierbar

und $\lim_{x_1 \rightarrow \bar{x}} \int_{x_1}^{\bar{x} + \alpha} M(x) dx$ endlich ist; 3. $|f_i(x; y_1 \dots y_n) - f_i(x; Y_1, \dots, Y_n)| (y_i - Y_i)$

$\leq M(x) \omega \left(\sum_{k=1}^n [y_k - Y_k]^2 \right)$ für $\bar{x} < x \leq \bar{x} + \alpha$ und $y_i \neq Y_i$. Sind dann $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ und $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ für fast alle Werte x des Intervalls $(\bar{x}, \bar{x} + \alpha)$ zwei Lösungen des Systems (1), die im Intervall $(\bar{x}, \bar{x} + \alpha)$ stetig und für jedes $x > \bar{x}$ absolut stetig sind, gilt ferner für $\bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \alpha$: $y_i(\bar{x}) = Y_i(\bar{x}) = \bar{y}_i$, $|y_i(x) - \bar{y}_i| \leq \beta$, $|Y_i(x) - \bar{y}_i| \leq \beta$, ($i = 1, \dots, n$), so ist $y_i(x) \equiv Y_i(x)$. Es besteht auch ein anderer Eindeutigkeitsatz, in dem vorausgesetzt wird, daß die $y_i(x)$ und $Y_i(x)$ im ganzen Intervall $(\bar{x}, \bar{x} + \alpha)$ das System (1) befriedigen und die Funktionen $f_i(x; y_1, \dots, y_n)$ in R dem Absolutbetrage nach beschränkt sind. Diese beiden Sätze enthalten als Spezialfälle Sätze von Tonelli, Perron, McShane. G. Sansone.

Bureau, Florent: Sur la recherche des équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 51—68 (1939).

Painlevé hat über die Gleichung $\ddot{y} = R(x, y, \dot{y})$, in der R eine rationale, irreduzible Funktion in y und \dot{y} bezeichnet, die x analytisch enthält, die Bedingungen für die Funktion R aufgestellt, damit das allgemeine Integral feste, kritische Punkte besitzt. Einige der bei der allgemeinen Diskussion auftretenden Fälle werden vom Verf. näher untersucht und an Beispielen erläutert.

Wegner (Heidelberg).

Cinquini, Silvio: Un'osservazione sopra i problemi di valori al contorno per l'equazione $y'' = f(x, y, y')$. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 322—325 (1940).

Verf. findet auf raschem Wege eine Bemerkung zu einem eigenen vorangehenden Satz (dies. Zbl. 20, 122; 21, 403) wieder, die auch kürzlich Gegenstand einer Arbeit von G. Scorza Dragoni (dies. Zbl. 20, 223) war, und gibt dem genannten Satz eine allgemeinere Fassung.

Autoreferat.

Sansone, G.: I polinomi di Hermite e di Laguerre come autosoluzioni. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 193—200 (1940).

Verf. beweist folgende Sätze: Die einzigen, nicht identisch verschwindenden Lösungen der Hermiteschen Differentialgleichung $v'' - 2xv' + 2\lambda v = 0$ bei beliebigem komplexem Parameter λ , die auf der reellen x -Achse der asymptotischen Abschätzung

$$(1) \quad |v(x)| < M e^{kx^2} \quad \text{für } |x| > x_0; \quad M > 0, \quad 0 \leq k < 1$$

genügen, sind bis auf konstante Faktoren die Hermiteschen Polynome $H_n(x)$, nämlich

$$v_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (n = 0, 1, \dots);$$

zu ihnen gehört der Parameterwert $\lambda_n = n$. Ähnlich gilt für die nicht identisch verschwindenden, auf der positiv-reellen x -Achse definierten Lösungen der Laguerreschen Differentialgleichung $xv'' + (\alpha - x + 1)v' + \lambda v = 0$ ($\alpha > -1$), die für $x > x_0 > 0$ der asymptotischen Abschätzung

$$(2) \quad |v(x)| < M e^{kx}; \quad M > 0, \quad 0 \leq k < 1$$

und für $x \rightarrow +0$ der Grenzbeziehung $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\alpha+1} v'(x) = 0$ unterliegen, daß bis auf konstante Faktoren

$$v_n(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

die Laguerreschen Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ und die zugehörigen Parameterwerte $\lambda_n = n$ sein müssen. — Der Beweis benutzt eine durch Integration der Differentialgleichung unter Heranziehung von (1) bzw. (2) gewonnene asymptotische Abschätzung für v' ; aus dieser folgt, wenn man in Greenscher Weise die Differentialgleichungen für $v(x)$ und $H_n(x)$ bzw. $L_n^{(\alpha)}(x)$ koppelt,

$$(\lambda - n) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} v(x) H_n(x) dx = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\lambda - n) \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} v(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = 0,$$

woraus unter Benutzung der Abgeschlossenheit der $H_n(x)$ bzw. $L_n^{(\alpha)}(x)$ das Weitere folgt. Damit sind ohne die Theorie der Integralgleichungen frühere Ergebnisse von Picone [Boll. Un. Mat. ital. 16, 205—218 (1937); dies. Zbl. 18, 18] verschärft worden.

Harald Geppert (Berlin).

Silberstein, Ludwik: On a hystero-differential equation arising in a probability problem. Philos. Mag., VII. s. 29, 75—84 (1940).

Verf. ist von einem Wahrscheinlichkeitsproblem zu der „hystero-differential equation“

$$P'(x) = \begin{cases} 1 - P(x) - [1 - P(x - \xi)]e^{-\xi} & \text{für } x \geq \xi, \\ 1 - P(x) - e^{-x} & \text{für } x < \xi \end{cases}$$

gelangt, wobei $P(0) = 0$ sein soll. Für $x < \xi$ hat man eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der bei $x = 0$ verschwindenden Lösung $P(x) = 1 - e^{-x}(1 + x)$. Für $x \geq \xi$ liegt eine Gleichung vor, die gewöhnlich als Funktional-Differentialgleichung bezeichnet wird und deren Lösungen schrittweise konstruiert werden können. Die Funktional-Differentialgleichung geht durch die Transformation $P(x) = 1 - e^{-x}y(x)$ in (1) $y'(x) = y(x - \xi)$ über. Verf. führt die Konstruktion der Lösung im einzelnen durch und gibt für die im Fall $\xi = 1$ auftretende Gleichung $\alpha e^x = 1$ auch numerische Werte der Lösungen an. Da Verf. bemerkt, daß ihm Untersuchungen solcher Funktional-Differentialgleichungen nicht bekannt seien, sei bemerkt, daß die Gleichung (1) von F. Schürer, Ber. Ges. Wiss. Leipzig 64, 167—236 (1912); 65, 239—263 (1913), untersucht ist und daß ferner Untersuchungen über diesen Gegenstand z. B. zu finden sind bei E. Schmidt, Math. Ann. 70, 499—524 (1911); P. Flamant, Rend. Circ. Mat. Palermo 48, 135—207 (1924); O. Perron, Math. Z. 45, 127—141 (1939) (dies. Zbl. 20, 232).

Kamke (Tübingen).

Pfeiffer, G.: La recherche des divers types d'intégrales de Lagrange. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 101—103 (1940).

Verf. betrachtet vollständige Systeme nichtlinearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung von einer der beiden Formen

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & F_i(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, m), \\ \text{B)} \quad & f_i(x_1, \dots, x_n, p_1/p_n, \dots, p_{n-1}/p_n) \quad (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Fügt man zu dem System A) die Gleichungen hinzu

$$(1) \quad F_{m+k}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a_{m+k-1} \quad (k = 1, \dots, n - m),$$

so daß A) und (1) zusammen wieder ein vollständiges System bilden, dann ergibt sich mittels Quadratur aus A), (1) das vollständige Lagrangesche Integral

$$(2) \quad z = \theta(x_1, \dots, x_n, a_m, \dots, a_{n-1}) + a_n$$

des Systems A) mit einer additiven Konstanten. Fügt man jedoch zu A) die Gleichungen hinzu

$$(3) \quad G_{m+j}(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = a_{m+j-1} \quad (j = 1, \dots, n + 1 - m),$$

so daß wieder ein vollständiges System entsteht, dann ergibt sich durch Auflösung von A), (3) das vollständige Lagrangesche Integral

$$(4) \quad z = \Phi(x_1, \dots, x_n, a_m, \dots, a_n)$$

des Systems A). — Nimmt man zu dem System B) die Gleichungen

$$(5) \quad f_{m+l}(x_1, \dots, x_n, p_1/p_n, \dots, p_{n-1}/p_n) = a_{m+l-1} \quad (l = 1, \dots, n - 1 - m)$$

hinzu, so daß B) mit (5) ein vollständiges System bildet, dann erhält man durch Integration von B), (5) das Mayersche Integral

$$(6) \quad z = a_{n-1} \varphi(x_1, \dots, x_n, a_m, \dots, a_{n-2}) + a_n$$

von B), in welchem eine multiplikative und eine additive Konstante auftritt. Wenn man zu B) Gleichungen der Form (1) hinzunimmt, so daß das System B), (1) vollständig ist, ergibt sich mittels Quadratur aus B), (1) das Lagrangesche Integral (2) des Systems B). Schließlich kann man auch das System B) durch Gleichungen der Form (3) zu einem vollständigen System ergänzen und findet dann durch Auflösung von B), (3) das Lagrangesche Integral (4) des Systems B). W. Neumer (Worms).

Zervos, P.: Sur le degré d'indétermination dans la théorie des équations différentielles. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 10, 3—13 (1939).

Der Grad der Unbestimmtheit eines Problems wird gemessen durch die Menge der Lösungen, die das Problem besitzt. Der Verf. erläutert das an einer Reihe von Problemen aus der Theorie der Differentialgleichungen, der Zahlentheorie, der Algebra und der Funktionentheorie. Etwas näher geht er ein auf die Frage nach den Lösungen einer Mongeschen Gleichung oder eines Systems von solchen, insbesondere auf die Frage nach der Möglichkeit, die allgemeinste Lösung explizit darzustellen. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O., in x, y, z hat ja längst diese Frage für eine Mongesche Gleichung in x, y, z beantwortet. Die Variationsrechnung führt auf spezielle Mongesche Systeme. Cartan hat für Mongesche Systeme von n Gleichungen in $n + 2$ Veränderlichen eine allgemeine Theorie entwickelt, die die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Möglichkeit einer expliziten Darstellung liefert. Der Verf. bespricht sodann einschlägige Untersuchungen von Goursat über Systeme von Mongeschen und Pfaffschen Gleichungen, bei denen die Cartansche Theorie der Pfaffschen Systeme verwertet wird. Er selbst will Mongesche Systeme betrachten, bei denen die Unbekannten nicht alle Funktionen derselben Zahl von unabhängigen Veränderlichen sind. Indem er alles auf ein Pfaffsches System zurückführt, kann er, wie er angibt, spezielle Fälle ermitteln, wo eine explizite Lösung möglich ist.

Engel (Gießen).

Seetharaman, V.: Methods of generating differential invariants with special reference to path-spaces of order 2. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 11, 81—85 (1940).

The author considers two methods of generating differential invariants the one due to Kosambi, the other due to Cartan. It is shown that these apparently different methods lead to the same results. Kosambi starts with the equation of variation belonging to the differential equation, whereas Cartan considers connecting Pfaffian forms. The foundation of both methods is the alternation of fundamental operations.

J. Haantjes (Amsterdam).

Beboutoff, M., et W. Stepanoff: Sur la mesure invariante dans les systèmes dynamiques qui ne diffèrent que par le temps. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 143—164 (1940).

Wenn man in einer stationären Strömung $T_t P$, $T_t T_s = T_{t+s}$, durch $dt' = \lambda(P)dt$ eine neue Zeit einführt ($\lambda > 0$), so hat die neue Strömung dieselben Stromlinien. Hat die erste Strömung das invariante Maß μ , so hat die neue $\mu' = \int \lambda d\mu$ zum invarianten Maß. Unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über Strömung, μ und λ ist das ein wohlbekannter Satz, den man durch direktes Ausrechnen beweist. Die Verff. beweisen ihn in dieser Arbeit unter viel weiteren Voraussetzungen: $T_t P$ ist in einem metrischen und separablen Raum definiert und stetig in (P, t) ; $\lambda > 0$ ist

stetig und $\int_{-\infty}^0 \lambda(T_t P)dt$, $\int_0^{\infty} \lambda(T_t P)dt$ divergieren; μ ist ein Carathéodorysches Maß,

mit $\mu < \infty$ für eine passende Umgebung eines beliebig vorgegebenen Punktes. μ' hat dann dieselben Eigenschaften. Der Satz wird mutatis mutandis auch dann bewiesen, wenn der Begriff der Zeittransformation mit Erhaltung der Stromlinien noch allgemeiner gefaßt wird.

E. Hopf (Leipzig).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

● **Ertel, Hans:** Elemente der Operatorenrechnung mit geophysikalischen Anwendungen. Berlin: Julius Springer 1940. VI, 133 S. u. 8 Abb. RM. 7.50.

Dem vom Verf. bezeichneten Ziel des Buches gemäß, nämlich „Studierende geophysikalischer Wissenschaften mit der Methodik der operatorenmäßigen Lösung der in der Geophysik auftretenden Differentialgleichungen bekannt zu machen“ und „die bei den Studierenden geophysikalischer Disziplinen noch vielfach vorhandene Scheu vor der Behandlung von Differentialgleichungen überwinden“ zu helfen, wird das Rechnen mit den Differential- und Integraloperatoren unter Verzicht auf eine strenge Begründung mit Hilfe der Laplacetransformation in rein formaler Weise eingeführt. Dementsprechend steht auch die Realisierung rationaler Operatoren durch direkte formale Teilbruchzerlegung in Verbindung entweder mit Reihenentwicklung der Teilbrüche oder mit dem Duhamelschen Integral sowie die Realisierung einfacher

Exponentialoperatoren $\left(e^{-D} \text{ und } e^{-\frac{1}{D}}\right)$ mit Hilfe ihrer Potenzreihenentwicklungen an erster Stelle, während die Laplacetransformation, deren grundlegende Bedeutung für die Operatorenrechnung nur beispielsmäßig gestreift wird, in Gestalt des Carsonschen Integrals bloß zur Gewinnung der Resultatfunktionen wichtiger singulärer Operatoren wie \sqrt{D} und $e^{-\sqrt{D}}$ herangezogen wird. Beispiele für die Realisierung von Operatoren

mit Hilfe bestimmter Integrale $\left(\text{wie } F(\sqrt{D}), F\left(\frac{1}{D}\right) \text{ bei bekanntem } F(D), \text{ ferner } e^{kD^2}\right)$ und eine Anwendung der Abelschen Integralgleichung beschließen diesen Hauptteil des Buches. Ihm vorangestellt ist ein Abschnitt „Allgemeines über Differentialgleichungen“, der die einfachsten Begriffe und Existenzsätze vermittelt, sowie eine mit Rücksicht auf den engen Raum erfreulich ausführliche Darstellung der geophysikalisch wichtigsten Differentialgleichungen der mathematischen Physik (Bewegungsgleichungen der Punktdynamik sowie des Elektrons im elektromagnetischen Feld, die eindimensionale Schwingungsgleichung, Potentialgleichung, die hydrodynamischen

Grundgleichungen, die Maxwell'schen Gleichungen und die Wärmeleitungsgleichung), die ein leichteres Verständnis des abschließenden Kapitels ermöglichen soll, in welchem die großen praktischen Vorzüge der Operatorenmethode zur Lösung von Differentialgleichungen an zahlreichen Anwendungsbeispielen auf Fragen der Geophysik dargetan werden. Behandelt wird: Elektronenbewegung in der Ionosphäre, elektrische Wellen in der Ionosphäre, harmonische Wasserwellen, stationäre Driftströme im homogenen Ozean, Eigenschwingungen abgeschlossener Wassermassen, Ausgleich von Salzgehaltstörungen im Ozean durch Turbulenz, Wärmeleitung im Erdboden und nichtstationäre Driftströme im homogenen Ozean. Eine anhangsweise beigegebene tabellarische Zusammenstellung der im Text besprochenen Realisierungen von Operatoren sowie ein Namens- und Sachverzeichnis bilden den Abschluß. *Schoblik (Brünn).*

Pleijel, Aake: Sur les propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres des plaques vibrantes. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 717—718 (1939).

Verf. entwickelt ohne die (in der nachstehend besprochenen Arbeit ausgeführten) Beweise eine neue Methode zur Ableitung der asymptotischen Gesetze der ortho-normierten Eigenfunktionen ψ_n und Eigenwerte $\lambda_n = -\kappa_n^4$ der Differentialgleichung (1) $\Delta \Delta \psi + \kappa^4 \psi = 0$ mit $\psi = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ auf dem Rand T des Gebietes S . Ausgehend von der Elementarlösung

$$R(p, q; -\kappa^4) = \frac{1}{2\pi\kappa^3} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\kappa r t}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{t^2 - 1}} \cdot \sin \frac{\kappa r t}{\sqrt{2}} dt$$

kann man die Greensche Funktion von (1) in der Form aufspalten: $K(p, q; -\kappa^4) = R(p, q; -\kappa^4) - k(p, q; -\kappa^4)$, worin k mit seinen Ableitungen stetig ist und (1) befriedigt. Der auf K angewandte Mercersche Satz gibt mit $p = q$:

$$(2) \quad \frac{1}{8\kappa^2} - k(q, q; -\kappa^4) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\psi_n^2(q)}{\lambda_n + \kappa^4}.$$

Nun zeigt sich, daß unter allen Funktionen $V(t)$, die für t auf T für V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ die gleichen Randwerte liefern wie $k(t, q; -\kappa^4)$, diese Funktion das Integral $\int \{(\Delta V)^2 + \kappa^4 V^2\} dS$ zum Minimum macht. Durch Wahl einer passenden Vergleichsfunktion kommt man somit zu einer Abschätzung $|k(q, q; -\kappa^4)| \leq \frac{\text{konst.}}{\kappa^3 l_q}$, worin l_q den kleinsten Abstand zwischen q und T bezeichnet. Dann folgt mittels eines Tauberschen Satzes von Hardy-Littlewood aus (2) das asymptotische Gesetz $\sum_{\lambda_n \leq t} \psi_n^2(q) \sim \frac{1}{4\pi} t^{1/2}$

und nach Integration von (2) über S mittels des gleichen Umkehrsatzes für die Zahl $N(t)$ der Eigenwerte unterhalb t : $N(t) \sim \frac{S}{4\pi} t^{1/2}$. (Die Formeln sind auf Grund der ausführlichen Publikation berichtigt.) *Harald Geppert (Berlin).*

Pleijel, Åke: Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations. Ark. Mat. Astron. Fys. **27** A, Nr 13, 1—100 (1940).

In Fortführung eines Verfahrens von Carleman (dies. Zbl. **17**, 114) entwickelt Verf. eine neue Methode, um die asymptotischen Gesetze der Eigenwerte und -funktionen bei physikalischen Randwertaufgaben zu bestimmen. Sie stützt sich einerseits auf den folgenden Hardy-Littlewoodschen Satz: Es sei $\Phi(t)$ nicht abnehmend, stieltjes-integrabel und für $x \rightarrow \infty$ gelte: $h(x) = \int_0^\infty (x+t)^{-\sigma} d\Phi(t) \sim Hx^{-\sigma}$, worin $H \neq 0$, $0 < \sigma < \rho$; dann ist für $t \rightarrow \infty$: $\Phi(t) \sim H\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)^{-1}\Gamma(\rho - \sigma + 1)^{-1}t^{\rho-\sigma}$; ist hingegen $H = 0$, also $h(x) = o(x^{-\sigma})$, so folgt $\Phi(t) = o(t^{\rho-\sigma})$. Andererseits benutzt

sie zu Abschätzungszwecken ein Variationsprinzip. Das erste Kapitel behandelt die Gleichung (1) $\Delta V + \lambda V = 0$ mit der Randbedingung $V = 0$ auf dem Rand T des Gebietes S . Bekanntlich läßt sich die Greensche Funktion der Gleichung (2) $\Delta V - \kappa^2 V = 0$ in einen singulären und einen regulären Bestandteil zerlegen: $G_1(p, q; -\kappa^2) = e^{-\kappa r_{pq}}/4\pi r_{pq} - g_1(p, q; -\kappa^2)$; r_{pq} = Abstand von p, q . Ist nun $G_1(p, q)$ die Greensche Funktion der Gleichung $\Delta V = 0$, so ist $G_1(p, q; -\kappa^2)$ die Resolvente von $G_1(p, q)$ für $\lambda = -\kappa^2$, und daher gibt der Hilbert-Schmidtsche Entwicklungssatz:

$$(3) \quad G_1(p, q; -\kappa^2) - G_1(p, q) = -\kappa^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\nu}(p)\varphi_{\nu}(q)}{\lambda_{\nu}(\lambda_{\nu} + \kappa^2)},$$

worin λ_{ν} die Eigenwerte, $\varphi_{\nu}(x)$ die normierten Eigenfunktionen der Aufgabe (1) bezeichnen. Für $p \rightarrow q$ folgt daraus

$$(4) \quad \frac{\kappa}{4\pi} + \{g_1(q, q; -\kappa^2) - g_1(q, q)\} = \kappa^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\nu}^2(q)}{\lambda_{\nu}(\lambda_{\nu} + \kappa^2)},$$

und es kommt nun auf eine Abschätzung der „Diagonalwerte“ $g_1(q, q; -\kappa^2)$ an. Im vorliegenden Falle wird sie durch den Parafschens Satz ermöglicht, der ein positives Maximum oder negatives Minimum der regulären Lösungen von (2) innerhalb S ausschließt. Ist l_q die untere Grenze der Abstände zwischen q und T , so liefert dieser Satz die Abschätzungen: $0 \leq g_1(q, q; -\kappa^2) < e^{-\kappa l_q}/4\pi l_q$ bzw. $0 \leq g_1(q, q) \leq 1/4\pi l_q$. Damit gibt die Anwendung des eingangs genannten Tauberschen Satzes auf (4) (die Rolle des x spielt κ^2) das asymptotische Gesetz $\sum_{\lambda_{\nu} \leq t} \varphi_{\nu}^2(q) \sim t^{3/2}/6\pi^2$; ähnlich folgt

aus der über S integrierten Gleichung (4) für die Zahl $N(t)$ der λ_{ν} unterhalb t : $N(t) \sim St^{3/2}/6\pi^2$. Bei höheren Randwertaufgaben fehlt ein Analogon des Parafschens Satzes; daher gibt Verf. ein weitertragendes, verallgemeinerungsfähiges Abschätzungsverfahren der Diagonalwerte. Betrachtet man das Integral $D(U) = \int_S \{\text{grad}^2 U + \kappa^2 U^2\} dS$,

so zeigt sich, daß unter allen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen U , die auf T dieselben Randwerte annehmen, wie $g_1(p, q; -\kappa^2)$ bei festem q , $g_1(p, q; -\kappa^2)$ das Integral $D(U)$ zum Minimum macht, und zwar ist auf Grund der Greenschen Sätze

$$(5) \quad g_1(q, q; -\kappa^2) = \min D(U) - \int_T P \frac{\partial P}{\partial n} dT,$$

wobei P den singulären Bestandteil von $G_1(p, q; -\kappa^2)$ bezeichnet. Als Konkurrenzfunktion benutzt Verf.

$$U = \bar{P}(p, q; -\kappa^2) = P(p, q; -\kappa^2) [1 - (1 - r_{pq}^m/\varrho_q^m(p))^n],$$

worin $\varrho_q(p) = \min(r_{pq}, l_q)$ ist, und gelangt durch (5) zur gewünschten Abschätzung $|g_1(q, q; -\kappa^2)| \leq \text{konst.}/l_q$, aus der weiter wie oben geschlossen wird. Diese Methode wendet Verf. zunächst auf das Problem der elektromagnetischen Strahlung in einem Raum mit vollkommen reflektierenden Wänden, sodann auf die Gleichung der Schwingungen eines elastischen Körpers an: $a \text{ grad div } u - b \text{ rot rot } u + \omega u = 0$, wobei am Rande entweder die elastische Verrückung u oder der Druck verschwinden soll. Die asymptotischen Gesetze enthalten die physikalisch wichtige Aussage, daß die mittlere Energie der hohen Oberschwingungen sich gleichmäßig über den ganzen elastischen Körper verteilt und je zur Hälfte auf kinetische und potentielle Energie entfällt. Das letzte Kapitel behandelt die Schwingungen der eingespannten Platte, über die im vorhergehenden Referat berichtet wurde. *Harald Geppert* (Berlin).

Weinstein, Alexandre: Sur la théorie unitaire des valeurs propres des membranes et des plaques encastrees. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 161—163 (1940).

In einer früheren Arbeit [Mém. Sci. math. **88** (1937); dies. Zbl. **18**, 216] hat Verf. gezeigt, daß das Eigenwertproblem der schwingenden Membran und das der schwingenden Platte als Grenzfälle einer stetigen Folge von Eigenwertproblemen aufgefaßt

werden können. In Fortführung dieses Gedankens entwickelt Verf. ein Verfahren, um das Schwingungsproblem der Platte auf elementarere Probleme zu reduzieren. Für das Gebiet S seien ω_i ($i = 1 \dots \infty$) mit der Vielfachheit r_i die Eigenwerte, $u_\nu^{(i)}$ ($\nu = 1 \dots r_i$) die zugehörigen orthonormierten Eigenfunktionen der eingespannten Membran. Es lasse sich in S ein vollständiges System linear unabhängiger harmonischer Funktionen $p_\mu^{(i)}$ ($\nu = 1 \dots r_i$; $i = 1 \dots \infty$) finden derart, daß die $u_\nu^{(i)}$ ($\nu = 1 \dots r_i$) zu allen $p_\mu^{(k)}$ ($\mu = 1 \dots r_k$; $k = 1 \dots \infty$) orthogonal sind mit Ausnahme des Systems $p_\nu^{(j)}$ ($\nu = 1 \dots r_j$; $j = i$), für das die Determinante $|(p_\mu^{(j)}, u_\nu^{(j)})| \neq 0$ ($\mu, \nu = 1 \dots r_i$) ist; hierin bedeutet (f, g) das Hilbertsche Skalarprodukt $\int_S f \cdot g \cdot dS$. Die Systeme der $p_\nu^{(i)}$ und $u_\nu^{(i)}$ sind also in weiterem Sinne biorthogonal. Denkt man sich nun die $p_\nu^{(i)}$ durchgezählt als p_μ ($\mu = 1 \dots \infty$) und bildet damit die Größen

$$\alpha_{\lambda\mu}(\varrho) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{r_i} (p_\lambda u_\nu^{(i)})(p_\mu u_\nu^{(i)}) \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \varrho}, \quad (\lambda, \mu = 1 \dots \infty),$$

so zerfällt deren Matrix in lauter quadratische Kästchen um die Hauptdiagonale, deren Determinanten mit $M_k(\varrho)$ ($k = 1, \dots, \infty$) bezeichnet seien. Die Eigenwerte der eingespannten Platte sind dann die Wurzeln der Gleichungen $M_k(\varrho) = 0$ ($k = 1 \dots \infty$); man ist also bei diesem Verfahren frei von Grenzübergängen. Ähnlich für die gestützte Platte. Beweise fehlen.

Harald Geppert (Berlin).

Sen, Bibhutibhusan: Note on the bending of thin uniformly loaded plates bounded by Cardioids, Lemniscates and certain other quartic curves. Z. angew. Math. Mech. 20, 99—103 (1940).

1. Durch die Transformation $\xi + i\eta = (x - iy)^{-1/2}$ werden die Geraden ξ und $\eta = \text{konst.}$ in 2 Scharen orthogonaler Kardioiden so abgebildet, daß die Kurven jeder Schar durch Ähnlichkeitstransformation mit der Spitze als Zentrum und beide Scharen durch Spiegelung an der Spitzennormalen ineinander übergehen. In diesen Koordinaten wird $\Delta = \frac{(\xi^2 + \eta^2)^3}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$. Partikuläres Integral von $\Delta \Delta w = 64p$ ist $w = p(\xi^2 + \eta^2)^{-4}$. Ist eine Kardioid $\xi = \alpha$ eingespannter Rand, so werden von $\Delta \Delta w = 0$ die Teilintegrale $K_1(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 + \eta^2)^{-4}$, $K_2\xi^2\eta^2(\xi^2 + \eta^2)^{-4}$, $K_3\xi(\xi^2 + \eta^2)^{-3}$ und $K_4\xi^3(\xi^2 + \eta^2)^{-3}$ addiert. Die beiden identischen Randbedingungen ergeben 5 Bestimmungsgleichungen, die durch die 4 Integrationskonstanten erfüllt werden können. Rationales Ergebnis: $w = p[1 - \xi^2/\alpha^2][1 - \xi^3/\alpha^3 + \eta^2/\alpha^2(1 - \xi/\alpha)][\xi^2 + \eta^2]^{-4}$. Die größte Durchbiegung auf der Symmetrieachse wird durch die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel einer Gleichung 4. Grades gegeben; sie liegt fast in der Mitte, etwas näher der Spitze. 2. Durch die Transformation $(x + iy)^2 - c^2 = c^2 e^{2(\xi + i\eta)}$ werden die Geraden $\xi = \text{konst.}$ in Cassinische Kurven mit den Brennpunkten $x = \pm c$, $y = 0$ und die Geraden $\eta = \text{konst.}$ in gleichseitige Hyperbeln durch die Brennpunkte abgebildet. In diesen Koordinaten wird $\Delta = \sqrt{2/c^2} e^{-3\xi} \sqrt{\mathfrak{Cof} 2\xi + \cos 2\eta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$. Partikuläres Integral von $\Delta \Delta w = 64pc^{-4}$ ist $w = pe^{4\xi}$. Ist die Lemniskate $\xi = 0$ eingespannter Rand, so werden von $\Delta \Delta w = 0$ die Teilintegrale K_1 , $K_2 e^{2\xi} \cos 2\eta$ und $K_3 e^{2\xi} \cos \eta \sqrt{\mathfrak{Cof} 2\xi + \cos 2\eta}$ addiert. Die Randbedingungen ergeben 4 Bestimmungsgleichungen, die durch die 3 Integrationskonstanten erfüllt werden können. 3. Durch die Transformation $(x + iy) \cos(\xi + i\eta) = c$ werden die Geraden η und $\xi = \text{konst.}$ in die Kurven abgebildet, die aus den Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten $x = \pm c$, $y = 0$ durch Inversion an einem Kreise um den 0-Punkt hervorgehen. In diesen Koordinaten wird $\Delta = 1/2c^2(\cos 2\xi + \mathfrak{Cof} 2\eta)^2(-\cos 2\xi + \mathfrak{Cof} 2\eta)^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$. Partikuläres Integral von $\Delta \Delta w = 16pc^{-4}$ ist $w = p(\cos 2\xi + \mathfrak{Cof} 2\eta)^{-2}$. Ist eine invertierte Ellipse eingespannter Rand, so werden von $\Delta \Delta w = 0$ die Teilintegrale $K_1(1 + \cos 2\xi \mathfrak{Cof} 2\eta)(\cos 2\xi + \mathfrak{Cof} 2\eta)^{-2}$, $K_2 \mathfrak{S}in 2\eta(\cos 2\xi + \mathfrak{Cof} 2\eta)^{-2}$,

$K_3 \sin 2\eta (\cos 2\xi + \mathfrak{Cof} 2\eta)^{-1}$ und $K_4 (\cos 2\xi + \mathfrak{Cof} 2\eta)^{-1}$ addiert; bei invertierter Hyperbel $K_2 \sin 2\xi (\cos 2\xi + \mathfrak{Cof} 2\eta)^{-2}$ und $K_3 \sin 2\xi (\cos 2\xi + \mathfrak{Cof} 2\eta)^{-1}$. Die Randbedingungen ergeben 5 Bestimmungsgleichungen, die durch die 4 Integrationskonstanten erfüllt werden können. 4. Durch die Transformation $(x + iy) \cos^2(\xi + i\eta)/2 = 2c$ werden die Geraden η und $\xi = \text{konst.}$ in die Kurven abgebildet, die aus Ellipsen und Hyperbeln mit dem 0-Punkt als Brennpunkt (deren andere Brennpunkte auf der x -Achse liegen) durch Inversion an einem Kreise um den 0-Punkt hervorgehen. In diesen Koordinaten wird $\Delta = 1/16 c^2 (\cos \xi + \mathfrak{Cof} \eta)^3 (-\cos \xi + \mathfrak{Cof} \eta)^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$.

Partikuläres Integral von $\Delta \Delta w = p/4 c^4$ ist $w = p (\cos \xi + \mathfrak{Cof} \eta)^{-4}$. Ist eine invertierte Ellipse eingespannter Rand, so werden von $\Delta \Delta w = 0$ die Teilintegrale

$K_1 (\cos^2 \xi \mathfrak{Cof}^2 \eta - 1) (\cos \xi + \mathfrak{Cof} \eta)^{-4}$, $K_2 (\cos \xi \mathfrak{Cof} \eta + 1) (\cos \xi + \mathfrak{Cof} \eta)^{-4}$, $K_3 \sin \eta (\cos \xi + \mathfrak{Cof} \eta)^{-3}$, $K_4 \sin 3\eta (\cos \xi + \mathfrak{Cof} \eta)^{-3}$, $K_5 \sin 2\eta (\cos \xi + \mathfrak{Cof} \eta)^{-2}$ und $K_6 (\cos \xi + \mathfrak{Cof} \eta)^{-2}$ addiert. Die Randbedingungen ergeben 7 Bestimmungsgleichungen, die durch die 6 Integrationskonstanten erfüllt werden können. — Die 4 partikulären Integrale sind in den kartesischen Koordinaten Polynome 4. Grades. *Ludwig.*

Papkovitch, P. F.: Über eine Form der Lösung des biharmonischen Problems für das Rechteck. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 334—338 (1940).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Spannungen in einer rechteckigen Platte zu berechnen, wenn zwei gegenüberliegende Kanten der Platte in beliebiger Weise mit Normal- und Schubspannungen belastet sind. Die Lösung geschieht durch die Airysche Spannungsfunktion mit Hilfe des folgenden Ansatzes

$$(*) \quad \varphi = \sum_k \{ Y_k(y) (a_k e^{-\lambda_k x} + c_k e^{-\lambda_k (l-x)}) + \bar{Y}_k(y) (\bar{a}_k e^{-\bar{\lambda}_k x} + \bar{c}_k e^{-\bar{\lambda}_k (l-x)}) \},$$

wo die Funktionen $Y_k(y)$, die bezüglich y gerade sind, durch die Ausdrücke

$$Y_k(y) = \frac{\text{ch}(s_k y)}{\text{ch}(s_k b)} - \frac{(s_k y) \text{sh}(s_k y)}{(s_k b) \text{sh}(s_k b)}$$

und durch die Wurzeln von $\text{sh}(2s_k b) = -(2s_k b)$

gegeben sind, die ungeraden Funktionen aber sich durch die Gleichungen

$$Y_k(y) = \frac{\text{sh}(s_k y)}{\text{sh}(s_k b)} - \frac{(s_k y) \text{ch}(s_k y)}{(s_k b) \text{ch}(s_k b)}$$

und durch die Wurzeln von $\text{sh}(2s_k b) = +(2s_k b)$

bestimmen lassen. Mit λ_k sind in (*) die Zahlen $\lambda_k = i s_k$ von der Form $\lambda_k = \beta_k - i \alpha_k$ bezeichnet, wobei α_k und β_k alle reell und positiv sind. Die a_k und c_k sind in (*) komplexe Integrationskonstanten. Die zu einer Größe konjugiert komplexe Größe ist mit einem Überstrich versehen. — Die Airysche Spannungsfunktion, die der Gleichung $\Delta \Delta \varphi = 0$ genügt, muß noch folgende Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_k \{ Y_k(y) Q_k + \bar{Y}_k(y) \bar{Q}_k \} &= F_1(y), \\ \sum_k \{ Y_k(y) R_k + \bar{Y}_k(y) \bar{R}_k \} &= F_2(y), \\ \sum_k \{ Y_k(y) \lambda_k Q_k + \bar{Y}_k(y) \bar{\lambda}_k \bar{Q}_k \} &= -G_1(y) + L_1(y), \\ \sum_k \{ Y_k(y) \lambda_k R_k + \bar{Y}_k(y) \bar{\lambda}_k \bar{R}_k \} &= G_2(y) + L_2(y) \end{aligned}$$

befriedigen, wo unter Q_k und R_k die Größen

$$\begin{aligned} a_k + c_k e^{-\lambda_k l} &= Q_k, \\ a_k e^{-\lambda_k l} + c_k &= R_k \end{aligned}$$

zu verstehen sind. Die Konstanten a_k und c_k bestimmen sich dann aus der Entwicklung der beiden Funktionen $L_1(y)$ und $L_2(y)$ in der Form

$$\begin{aligned} L_1(y) &= 2 \sum_k \{ Y_k(y) \lambda_k c_k e^{-\lambda_k l} + \bar{Y}_k(y) \bar{\lambda}_k \bar{c}_k e^{-\bar{\lambda}_k l} \}, \\ L_2(y) &= 2 \sum_k \{ Y_k(y) \lambda_k a_k e^{-\lambda_k l} + \bar{Y}_k(y) \bar{\lambda}_k \bar{a}_k e^{-\bar{\lambda}_k l} \}. \end{aligned}$$

Statt der Funktionen $Y_k(y)$ führt Verf. neue Funktionen $T_n(y)$ ein, die lineare Kombinationen von $Y_k(y)$ und $\bar{Y}_k(y)$ sind. Sie sind zueinander orthogonal und gestatten es, die Entwicklungskoeffizienten von $L_1(y)$ und $L_2(y)$ in einfachster Weise zu bestimmen. *Wegner (Heidelberg).*

Vecoua, I.: Randwertaufgaben in der Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. 1 u. 2. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 29—34, 181—185 u. deutsch. Zusammenfassung 185—186 (1940) [Russisch].

Piskounov, N.: Intégration des équations de la théorie des couches frontières. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 104—106 (1940).

Auf eigene frühere Ergebnisse (dies. Zbl. 19, 409) gestützt, teilt Verf. die Methode zum Beweis des folgenden Satzes mit: Die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-U}} \frac{\partial U}{\partial x}$

besitze eine Lösung in einem Halbstreifen $x \leq X$, $-R \leq y \leq R$. Dann lassen sich die sukzessiven Ableitungen der Lösung durch das Maximum der Lösung selbst im betreffenden Gebiet unabhängig von den Anfangsbedingungen abschätzen. *Garten.*

Muschelischvili, N. I.: Bemerkungen zum Haupttrandwertproblem der Potentialtheorie. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 169—170 (1940) [Russisch].

Muschelischvili, N. I.: Über die Lösung des Dirichletschen Problems in der Ebene. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 99—106 (1940) [Russisch].

Brelot, Marcel: Critères de régularité et de stabilité. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 125—137 (1939).

Bedingungen für die Regularität und für die Stabilität eines Randpunktes einer offenen bzw. einer abgeschlossenen Punktmenge im Raume von $m \geq 2$ Dimensionen.

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Dressel, F. G.: A note on Fredholm-Stieltjes integral equations. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 434—437 (1938).

L'A. dimostra che l'equazione integrale

$$f(x) = m(x) + \lambda \int_0^1 f(y) dG(x, y)$$

con $G(x, y)$ assolutamente continua rispetto a $g(y)$ può essere trasformata in un'equazione tipo Fredholm.

C. Miranda (Torino).

Lozinski, S.: Über singuläre Integrale. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 329—362 (1940).

Es seien die Funktionen $\varphi_n(t, x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) im Quadrat $a \leq t \leq b$, $a \leq x \leq b$ meßbar und im wesentlichen beschränkt, d. h. fast überall $|\varphi_n(t, x)| < K_n$. Die Formel

$f_n(x) = \int_a^b f(t) \varphi_n(t, x) dt$ definiert dann, für jedes n , je eine lineare Transformation

der Klasse L der in (a, b) integrierbaren Funktionen in sich selbst. Es folgt aus Resultaten von Kantorovitch und Vulich (dies. Zbl. 17, 215), daß eine notwendige Bedingung dafür, daß $f_n(x)$ in L stark gegen $f(x)$ konvergiere, die folgende ist: Es soll

eine Konstante K derart geben, daß $(1) \int_a^b |\varphi_n(t, x)| dx < K$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) fast überall in $a \leq t \leq b$. — Es wird nun die Frage der schwachen Konvergenz

$(2) \int_a^b f_n(x) g(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) g(x) dx$ untersucht. Charakteristisch sind die folgenden Resultate: Damit (2) für jede Funktion $f(x)$ aus L und für jede beschränkte meßbare Funktion $g(x)$ statthabe, ist notwendig, daß es eine Konstante K so gebe, daß (1)

fast überall erfüllt sei. Damit (2) für jede beschränkte meßbare Funktion $f(x)$ und

für jede Funktion $g(x)$ aus L erfüllt sei, ist notwendig, daß es eine Konstante K' so gebe, daß $\int_a^b |\varphi_n(t, x)| dt < K' (n = 1, 2, 3, \dots)$ fast überall auf $a \leq x \leq b$ statthabe.

Diese Bedingungen sind auch hinreichend, wenn die Gültigkeit von (2) schon für die Funktionen $f(x)$ (bzw. im zweiten Falle für die Funktionen $g(x)$) einer in L überall dichten Menge feststeht. — Der zweite Teil der Arbeit behandelt mit Hilfe der Ergebnisse des ersten Teiles verschiedene lineare Interpolationsprozesse.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged, Ungarn).

Raikov, D.: Sur les fonctions positivement définies. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 860—865 (1940).

On appelle fonction caractéristique une fonction $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, qui admet une représentation de la forme $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$, où $F(x)$ est une fonction non décroissante et telle que $F(\infty) - F(-\infty) = 1$. L'auteur dit qu'un ensemble de telles fonctions est compact lorsque toute suite tirée de cet ensemble contient une suite partielle convergeant uniformément sur chaque segment fini. Une condition à la fois nécessaire et suffisante pour qu'un tel ensemble soit compact est que chaque suite $f_n(t)$ choisie de cet ensemble soit uniformément continue au point $t = 0$, c'est-à-dire qu'on puisse trouver à chaque ε positif un $h(\varepsilon)$ positif de façon que si $|h| < h(\varepsilon)$, alors $|f_n(h) - 1| < \varepsilon$, quel que soit n . — En s'appuyant sur ce lemme, l'auteur donne une démonstration nouvelle du théorème suivant, dû pour $\omega = \infty$ à M. Bochner (voir ce Zbl. 6, 110) et pour ω fini à M. Krein (voir ce Zbl. 22, 353): Soit $g(t)$ une fonction positivement définie sur $(-\omega, \omega)$, c'est-à-dire telle que $\sum_i^n \sum_j^n g(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$, quels que soient l'entier n , les nombres réels t_i du segment $(-\omega, \omega)$, et les quantités complexes z_i . Supposons, de plus, que $g(0) = 1$ et que $g(t)$ est continue au point $t = 0$. Dans ces conditions, il existe une fonction caractéristique $f(t)$ coïncidant avec $g(t)$ sur le segment $(-\omega, \omega)$.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Alaoglu, Leon: Weak topologies of normed linear spaces. Ann. of Math., II. s. 41, 252—267 (1940).

Recently it has been recognized by many authors (Bourbaki, Goldstine, Kakutani, Taylor etc.) that, in some problems concerning Banach spaces, it is rather relevant to make use of the weak topology than the weak convergence. The § 1 of the present paper is devoted to the study of the weak topologies defined by the weak limits in the sense of Moore-Smith. By theorem 1:3 the unit sphere of the space adjoint to a Banach space may be considered as a closed linear subspace of the space of the continuous functions on a bicomact Hausdorff space. Theorem 1:4 proves the equivalence of three types of closure; the transfinite-, the regular- and the weak-. Theorem 2:1 gives criterions for a Banach space to be isomorphic or equivalent to another Banach space. Theorem 4:1 gives a necessary and sufficient condition that the series of elements of the adjoint of a Banach space be unconditionally convergent as a set of functionals, the result being applied to the integration of abstractly-valued functions. The differentiations of a. v. f. are also discussed. Theorem 5:5 states that a function on an interval (a, b) to a Banach space E which is of bounded absolute variation should have a strong derivative almost everywhere, if E is reflexive (= regular). Theorem 6:2 gives the general form of the linear continuous operation on the Banach space L to the adjoint of a Banach space. These results, though much interesting, have many contacts with those due to Kakutani (this Zbl. 22, 53), Gel'fand (this Zbl. 20, 367) and B. J. Pettis (this Zbl. 21, 326). *Kôsaku Yosida* (Osaka).

Kakutani, Shizuo: Weak topology, bicomact set and the principle of duality. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 63—67 (1940).

Vorankündigung folgender Sätze: 1. Ein Banachraum E ist dann und nur dann regulär (reflexiv), wenn die Kugel $\|x\| \leq 1$ von E bikompakt ist in der durch \bar{E} in E erzeugten schwachen Topologie. 2. Jeder Boolesche Ring mit Einselement läßt sich isomorph darstellen durch den Booleschen Ring aller zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen eines total unzusammenhängenden bikompakten topologischen Raumes. Dieses von M. H. Stone [Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 375—481 (1937); dies. Zbl. **17**, 135] erhaltene Resultat wird auf neuem Wege abgeleitet. 3. Ein halbgeordneter Banachraum E heiße (M) -Raum, wenn aus $x \geq 0$, $y \geq 0$ stets $\|x \cup y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ folgt. Zu jedem (M) -Raum A existiert ein bikompakter topologischer Raum Ω , so daß A isometrisch und verbandstreu abgebildet wird auf den Raum $C(\Omega)$ aller stetigen Funktionen $x(t)$ auf Ω . G. Köthe (Münster i. W.).

Kunisawa, Kiyonori: Some theorems on abstractly-valued functions in an abstract space. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 68—72 (1940).

$f(t)$ sei eine im Intervall $[0, 1]$ erklärte Funktion mit Werten in einem Banachraum E . Mit $L^{(p)}(E)$, $p \geq 1$, wird der Raum aller im Sinne von Bochner meßbaren Funktionen $f(t)$ bezeichnet, für die $\int_0^1 \|f(t)\|^p dt < \infty$ gilt. $L^{(p)}(E)$ ist ein Banachraum mit $\|f\| = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^p dt \right)^{1/p}$ als Betrag. Es wird bewiesen, daß $L^{(p)}(E)$ für $p > 1$ lokal schwach kompakt ist, wenn E lokal schwach kompakt ist; $L^{(1)}(E)$ ist unter derselben Voraussetzung schwach vollständig. G. Köthe (Münster i. W.).

Sirvint, G.: Espace de fonctions linéaires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 123—126 (1940).

Ausgehend von einem im kleinen konvexen Raum E^* , der der lineare Operationsraum von $f(x)$ in E ist, definiert Verf. die cc -Topologie als Wiederholung der konjugierten Topologie. In einem Banachschen Raum fällt diese cc -Topologie mit der ursprünglichen Topologie zusammen. Im allgemeinen gilt dies aber nicht. Es gelten aber folgende Sätze: Die Topologie von E ist schwächer als die cc -Topologie. Ist E von zweiter Kategorie, so fällt seine Topologie mit der cc -Topologie zusammen. Ebenso: Ist E von zweiter Kategorie, so ist jede schwachbeschränkte Menge beschränkt. Die Konvergenz von E ist schwächer als die cc -Konvergenz. Verf. nennt die Konvergenz stabil, falls es für jede Folge $x_n \rightarrow \infty$ eine Folge von positiven Zahlen $a_n \rightarrow \infty$ gibt, so daß die Menge $\{a_n x_n\}$ beschränkt sei. Ist die Konvergenz von E stabil, so ist sie gleichwertig mit der cc -Konvergenz. L. Egyed (Budapest).

Fortet, Robert: Remarques sur les espaces uniformément convexes. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 497—499 (1940).

Il est connu que dans un espace B uniformément convexe (u. c.; pour la définition voir Clarkson, ce Zbl. **15**, 356) un point quelconque x admet une projection et une seule sur toute variété linéaire fermée de B [voir Pettis, Duke math. J. **5**, 249 (1939); ce Zbl. **21**, 326, où ce résultat se trouve énoncé sous une forme différente]. L'auteur dit que l'élément x est normal à l'élément y lorsque la projection de x sur la variété (y) est nulle; x étant normal à y et $|x| = |y| = 1$, B est à norme régulière si l'on a $(|x + \lambda y| - |x|)/\lambda \rightarrow 0$ pour $\lambda \rightarrow 0$. Si cette convergence est uniforme en x et y , alors B est dit à norme uniformément régulière. Les espaces L^p ($p > 1$) sont de ce type. — L'auteur énonce les propositions suivantes. Dans un espace B u. c. à norme régulière, l'ensemble des y auxquels est normal un point déterminé x , est une variété linéaire fermée. L'espace conjugué B^* d'un espace B u. c. et à norme uniformément régulière est du même type; on peut établir entre B et B^* une correspondance bi-univoque et bicontinue de façon que si x_1 est normal à x_2 et si X_1 et X_2 sont les éléments correspondants de B^* , alors X_1 est aussi normal à X_2 . Bela de Sz. Nagy (Szeged).

Vulich, B.: Une définition du produit dans les espaces semi-ordonnés linéaires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 850—854 (1940).

Soit X un espace semi-ordonné linéaire (cf. Kantorovitch, ce Zbl. 16, 405) ayant un élément 1, c'est-à-dire un élément tel que $\inf(x, 1) > 0$ pour tout élément positif x de X . Un élément e de X s'appelle une quasi-unité si $\inf(e, 1 - e) = 0$. Supposons que l'ensemble de toutes les quasi-unités de X soit bien-ordonné suivant le type ν . Tout élément positif x admet alors une représentation $x = \sum_{\xi < \nu} \alpha_{\xi} e_{\xi}$, où les α_{ξ} sont des nombres réels non-négatifs; la somme d'une telle série transfinie étant définie par récurrence transfinie, moyennant les enveloppes supérieures de ses sommes partielles. — L'auteur introduit le produit des éléments $x = \sum_{\xi < \nu} \alpha_{\xi} e_{\xi}$ et $y = \sum_{\eta < \nu} \beta_{\eta} e_{\eta}$ par $xy = \sum_{\xi, \eta < \nu} \alpha_{\xi} \beta_{\eta} \inf(e_{\xi}, e_{\eta})$, à condition que cette dernière série converge; il montre alors que cette définition est justifiée. Le produit de deux éléments quelconques s'en dérive par une décomposition en parties positive et négative. — Remarquons que M. F. Riesz a donné une définition analogue du produit, sans avoir fait intervenir des raisonnements transfinis, cf. ce Zbl. 18, 219 et 22, 318.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Vulich, B.: Sur les propriétés du produit et de l'élément inverse dans les espaces semi-ordonnés linéaires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 855—859 (1940).

x étant un élément de l'espace X (voir la note précédente) soit $e(x)$ l'enveloppe inférieure des quasi-unités e satisfaisant à l'inégalité $\inf(x, 1 - e) = 0$; $e(x)$ étant alors aussi une quasi-unité. L'auteur dit que l'élément x admet un inverse y , si $e(x) = e(y)$ et si $xy = e(x)$; désignons alors y par x^{-1} . Si $x > 0$, alors on peut définir x^{-1} par la somme d'une certaine série transfinie $\sum_{\xi < \nu} \gamma_{\xi} e_{\xi}$ à termes positifs, la convergence ou la divergence de cette série entraînant respectivement l'existence ou la non-existence de x^{-1} .

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Michal, A. D., and D. H. Hyers: General differential geometries with coordinate interspace inner product. Tôhoku Math. J. 46, 309—318 (1940).

An Stelle des in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 20, 369) beim Aufbau der allgemeinen Differentialgeometrie zugrunde gelegten bilinearen inneren Produktes $[x, y]$ der Elemente eines Banachraumes wird hier ein inneres Produkt $[x_1, x_2]$ zwischen Elementen x_1 und x_2 aus verschiedenen Banachräumen B_1 und B_2 zugrunde gelegt. Speziell wird $B_2 = B'_1$ dem konjugierten Raum zu B_1 gesetzt. Es wird gezeigt, daß auch damit im wesentlichen derselbe Aufbau möglich ist.

G. Köthe (Münster i. W.).

Michal, Aristotle D., Roderick Davis and Max Wyman: Polygenic functions in general analysis. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 97—107 (1940).

Es wird die Theorie der polygenen Funktionen (komplexe Funktionen, die in jedem Punkt in jeder Richtung einen Differentialquotienten haben) auf Banachräume übertragen und für gewisse Klassen von polygenen Funktionen eine Charakterisierung durch Differentialgleichungen gegeben.

G. Köthe (Münster i. W.).

Krein, M., D. Milman and M. Rutman: A note on basis in Banach space. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 106—108 u. engl. Zusammenfassung 108—110 (1940) [Russisch].

Es wird bewiesen, daß ein Banachraum, der eine Basis besitzt, stets auch eine Basis $y_n = \sum_{i=1}^{p_n} c_{ni} x_i$ besitzt, $\{x_i\}$ irgendeine überall dichte Folge von Elementen. Daraus folgt, daß eine Folge von Polynomen $p_i(t)$ existiert, so daß jede in $[0, 1]$ stetige Funktion sich eindeutig in eine absolut konvergente Reihe $\sum_i c_i p_i(t)$ entwickeln läßt.

G. Köthe (Münster i. W.).

Levine, B., and D. Milman: On linear sets in space C consisting of functions of bounded variation. Commun. Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 102—105 u. engl. Zusammenfassung 105 (1940) [Russisch].

C sei der Banachsche Raum aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $(0,1)$. Die Norm einer solchen Funktion ist ihr größter Wert. Dann gilt folgender Satz: Ist E eine lineare abgeschlossene Untermenge von C , die nur Funktionen mit beschränkter Variation enthält, so ist die Dimension von E endlich. *B. Pospíšil.*

Taldykin, A.: Uniformly minimal systems of functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 531—534 (1940).

Taldykin, A.: Normal systems of functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 535—539 (1940).

Taldykin, A.: Integral equations with normal and semi-normal nuclei. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 540—545 (1940).

Taldykin, A.: On the closedness of biorthogonal systems of functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 546—549 (1940).

Es bezeichne $\{\varphi_i(x)\}$ ein System in (a, b) quadratisch integrierbarer Funktionen und $R(\varphi_i)$ den diesem System assoziierten Funktionalraum, d. h. den Raum der im Mittel durch lineare Kombinationen der φ_i approximierbaren Funktionen. Falls keine der Funktionen φ_i dem zu den übrigen Funktionen des Systems assoziierten Funktionalraum angehört, nennt man das System ein minimales System, und S. Lewin [Math. Z. 32 (1930)] hat bewiesen, daß hierzu notwendig und hinreichend die Möglichkeit ist, ein anderes System $\{\varphi^i\}$ von Funktionen aus $R(\varphi_i)$ zu konstruieren, das zu den φ_i biorthogonal ist; letzteres heißt das dem System $\{\varphi_i\}$ adjungierte System. Verf. nennt nun ein System $\{\varphi_i\}$ gleichmäßig minimal, wenn es minimal ist und außerdem die Normen der Funktion φ_i und φ^i beschränkt sind; er weist als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein System $\{\varphi_i\}$ mit beschränkten Normen gleichmäßig minimal sei, die Tatsache nach, daß der kleinste Eigenwert $\lambda_1^{(n)}$ der Gramschen Matrix der ersten n Funktionen des Systems die Grenzbeziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)} > 0$ erfüllt. —

Weiterhin bezeichnet Verf. als normale Systeme solche Funktionssysteme mit beschränkten Normen, bei denen der kleinste und der größte Eigenwert der Gramschen Matrix der ersten n Funktionen des Systems in einem beschränkten Intervall, das die Null nicht enthält, liegen, gleichgültig welchen Wert n hat. Unter anderen sind folgende Sätze über Minimalsysteme beachtenswert: 1. Das adjungierte System eines gleichmäßig minimalen Systems ist normal; 2. notwendig und hinreichend, damit ein gleichmäßig minimales System auch normal sei, ist, daß die beiden dem System und seinem adjungierten System assoziierten Funktionalräume zusammenfallen; 3. ist $\{\varphi_i\}$ ein normales System und $f(x)$ eine Funktion aus L^2 , so konvergieren die beiden Reihen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \int_a^b f(x) \varphi^i(x) dx, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^i(x) \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx$$

im Mittel gegen die Projektion von $f(x)$ auf den dem System $\{\varphi_i\}$ und seinem adjungierten System assoziierten Funktionalraum; 4. notwendig und hinreichend für die Existenz

einer Funktion $f(x)$ aus L^2 , die die Gleichung $\int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = A_i$ befriedigt, ist die

Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} A_i^2$. Die Eigenschaften der normalen Systeme lassen sich

leicht auf Systeme komplexer Funktionen übertragen, was die Anwendung der erhaltenen Ergebnisse auf das Studium der Integralgleichungen mit normalem Kern gestattet, d. h. solcher Gleichungen, für die die Systeme ihrer Eigenfunktionen und der Eigenfunktionen der transponierten Gleichung normal sind. Auf solche Gleichungen kann man den Hilbert-Schmidtschen Entwicklungssatz ausdehnen, falls die Pole des lösenden Kernes sämtlich einfach sind. Diese letzte Tatsache bleibt auch

dann gültig, wenn der Kern der Integralgleichung nur halbnormal ist, d. h. nur eines der Systeme der Eigenfunktionen des Kernes oder des transponierten Kernes normal ist. Der Theorie der Integralgleichungen mit normalem oder halbnormalem Kern fügt sich als Spezialfall die Theorie der Gleichungen mit symmetrischem oder symmetrisierbarem Kern ein. Schließlich überträgt Verf. auf normale Funktionssysteme ein Vollständigkeitskriterium, das Gunther (dies. Zbl. 17, 347) für Orthogonalsysteme ausgesprochen hat.

C. Miranda (Torino).

Gantmacher, Vera: Über schwache totalstetige Operationen. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 301—307 (1940).

Eine lineare Operation A in einem Banachraum E heißt schwach totalstetig, wenn sie jede beschränkte Menge in eine schwach kompakte überführt. A ist dann und nur dann schwach totalstetig, wenn der konjugierte Operator A^* es ist. Ebenfalls notwendig und hinreichend dafür ist, daß aus $|\sum_1^n \lambda_i c_i| \leq M |\sum_1^n \lambda_i A^* f_i|$ für beliebige $n, f_i \in \bar{E}$ stets die Lösbarkeit des Gleichungssystems $f_n(x) = c_n$ folgt. Analoge Sätze, wenn der Bildraum von A überdies noch als separabel vorausgesetzt wird. Köthe.

Neumark, M.: On the square of a closed symmetric operator. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 866—870 (1940).

Es werden einige Kriterien dafür abgeleitet, daß das Quadrat H^2 eines abgeschlossenen symmetrischen Operators H einen im Hilbertschen Raum \mathfrak{H} dichten Definitionsbereich hat, z. B. ist dafür notwendig und hinreichend ($\mathfrak{R}(A)$ bedeutet den Bildraum des Operators A), daß die lineare Summe der Räume $\mathfrak{m}^- = \mathfrak{H} - \mathfrak{R}(H - iE)$ und $\mathfrak{m}^+ = \mathfrak{H} - \mathfrak{R}(H + iE)$ ein abgeschlossener Teilraum von \mathfrak{H} ist. Es wird ein Beispiel dafür gegeben, daß H^2 einen in \mathfrak{H} nicht dichten Definitionsbereich haben kann.

G. Köthe (Münster i. W.).

Neumann, J. v.: On rings of operators. III. Ann. of Math., II. s. 41, 94—161 (1940).

Let \mathfrak{H} be an abstract Hilbert space. Let \mathbf{B} be a class of all bounded, everywhere defined and closed operators in \mathfrak{H} . \mathbf{M} is said to be a factor provided that \mathbf{M} is a subring of \mathbf{B} [$A, B \in \mathbf{M}$ implies $\alpha A, A^*, A + B, AB \in \mathbf{M}$ (α being a complex number) and closed in a suitable topology of \mathbf{B}] and that center of \mathbf{M} is $(\alpha 1)$. In the first paper [Murray and v. Neumann, Rings of operators. I. Ann. of Math. 37 (1936); this Zbl. 14, 161. This paper is quoted as (1) in the following] it is proved that in \mathbf{M} a relative dimension function $D(\mathfrak{M})$ for all $\mathfrak{M} \in \mathbf{M}$ [for the definition see (1), Def. 4, 2, 1] is defined and the range of $D(\mathfrak{M})$ is one of the following sets: (I) discrete and finite case (I_n): the set $0, 1, 2, \dots, n$. (II) continuous and finite case (II_1): the set of all $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$, (III) discrete and infinite case (I_∞): the set $0, 1, 2, \dots, \infty$, (IV) continuous and infinite case (II_∞): the set of all $\alpha, 0 \leq \alpha \leq \infty$, (V) purely infinite case (III_∞): the set $0, \infty$. Among the problems stated in (1), one of the most important is problem 3: Which ones of the classes (I_n) — (III_∞) do really exist? The existence of the first four classes is proved, but the last class (III_∞) was undecided in (1). The object of this paper is to answer the problem positively. In the following the outline of the proof and the tools to be used are illustrated. In the first chapter the notion of norm is introduced. Put $\text{Rank}(A) = D([\text{Range } A])$ for $A \in \mathbf{M}$. If $\text{Rank}(A)$ is finite, then there exists $\mathfrak{M} \in \mathbf{M}$ such that $[\text{Range}(A)], [\text{Range}(A^*)] \subset \mathfrak{M}$. Let $A_{(\mathfrak{M})}$ be the part of \mathfrak{M} in A , then its trace $T_{\mathfrak{M}(\mathfrak{M})}(A_{(\mathfrak{M})})$ is defined for A of finite rank in the second paper [Murray and v. Neumann, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937); this Zbl. 17, 360. Def. 2, 2, 1], since the factor necessarily belongs to one of the finite classes. $\bar{T}_{\mathbf{M}}(A) = D(\mathfrak{M}) T_{\mathfrak{M}(\mathfrak{M})}(A_{(\mathfrak{M})})$ is defined for all A of finite rank and is independent of \mathfrak{M} . If one put $[[A]] = (T_{\mathbf{M}}(A^* A))^{1/2}$ for A of finite rank, this satisfies the norm condition in a linear space, and $[[AB]] \leq \|A\| \cdot [[B]]$ for all B of finite rank, where $\|A\|$ satisfies also the norm condition in a linear space. By these norms notion of convergence is introduced. If in the sequence of operators $A_1, A_2 \dots \in \mathbf{M}$ such

that all A_n is of finite rank and $\in \mathbf{M}$, the conditions are fulfilled: (I) numbers $\|A_1\|, \|A_2\|, \dots$ are bounded, (II) $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|A_m - A_n\| = 0$, (III) there exists an operator A such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n f - A f\| = 0$ for all f in \mathfrak{H} ($\|\cdot\|$ is the norm in \mathfrak{H}), then one writes $A \sim (A_1, A_2, \dots)$. A is said to be normed if a sequence A_1, A_2, \dots with $A \sim (A_1, A_2, \dots)$ exists and its norm $\|A\|$ is defined as $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|$, which exists always and satisfies the norm condition in a linear space. Further define inner product of normed operators A and B by $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mathbf{M}}(A_n B_n^*)$. Thus the definition of relative trace was extended to some $A \in \mathbf{M}$ of infinite rank but not to all $A \in \mathbf{M}$. In Chapter II, the operator $A^{[E]} = E A E + (I - E) A (I - E)$ is defined for any bounded operators A and any projection E which is the analogue of the process of taking the diagonal part of a finite matrix. If A_n is of finite rank and E_1, E_2, \dots is a sequence of projections which commute with each other, then $\bar{A} = A^{[E_1|E_2|\dots|E_n]}$ is defined by $\bar{A} \sim (A_1, A_2, \dots)$ where $A_n = A^{[E_1|E_2|\dots|E_n]}$. Consider an abelian ring $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$. There exists a sequence of projections $E_1, E_2, \dots \in \mathbf{A}$ such that $\mathbf{A} = \mathbf{R}(E_1, E_2, \dots)$ (v. Neumann, Math. Ann. 102, 401). Since \mathbf{A} is abelian, E_1, E_2, \dots commute with each other, and then $A^{[E_1|E_2|\dots]}$ exists for every A of finite rank. If (I) ring $\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}'$ (\mathbf{A}' is the ring of all A' which commute with all $A \in \mathbf{A}$ and \mathbf{A}^*) is purely infinite and (II) for every finite (in the sense of (1), Def. 7, 1, 1) projection $F \in \mathbf{M}$, $F^{[E_1|E_2|\dots]} = 0$ implies $F = 0$, then \mathbf{M} is of class $(III)_{\infty}$. Chapter III is devoted to the construction of the rings \mathbf{M}, \mathbf{M}' . Let S be a fixed set. A system Γ of subsets of S is called a Borel-system if (I) $\emptyset \in \Gamma$ (empty set) $\in \mathfrak{H}$, (II) $M \in \Gamma$ implies $S - M \in \Gamma$ and (III) $M_1, M_2, \dots \in \Gamma$ imply $M_1 + M_2 + \dots \in \Gamma$. Borel-system is called separable if there exists an enumerable system Δ of subsets of S such that (I) Γ is a minimal Borel-system $\supset \Delta$ and (II) $x, y \in S$ implies $x = y$ when $x \in M$ is equivalent to $y \in M$ for all $M \in \Delta$. For a separable Borel-system Γ in S , a function $\mu(M)$ is called Γ -measure if (I) $\mu(M)$ is defined for all $M \in \Gamma$, (II) $0 \leq \mu(M) \leq +\infty$, (III) there exists a sequence $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots \in \Gamma$ with $T^{(1)} + T^{(2)} + \dots = S$ such that $\mu(T^{(i)}) < \infty$, and (IV) $\mu(M)$ is completely additive. By Γ, μ we define the Γ -measurability of complex valued functions $f(x)$ and Γ, μ -integral $\int_M f(x) d_{\mu} x$ of such functions. One denotes by $\mathfrak{H}_S = \mathfrak{H}_{S, \Gamma, \mu}$ the set of all complex valued Γ -measurable functions $f(x)$ ($x \in S$) with a finite $\int_S |f(x)|^2 d_{\mu} x$.

If the inner product $(f, g)_S$ is defined by $\int_M f(x) \overline{g(x)} d_{\mu} x$ then \mathfrak{H}_S becomes a finite dimensional Euclidean or a Hilbert space. Let $\nu(M)$ be another Γ -measure. Then if $\mu(M) = 0$ implies $\nu(M) = 0$, then there exists a Γ -measurable function $\kappa(x) \geq 0$ such that $\int_M f(x) d_{\mu} x = \int_S f(x) \kappa(x) d_{\nu} x$ for all Γ -measurable functions $f(x)$ and all sets $M \in \Gamma$. $\kappa(x)$ is denoted by $\frac{d_{\nu}}{d_{\mu}}(x)$. Further S -group G is defined by the following properties: (I) G is an enumerable group and (II) every $\alpha \in G$ defines a certain one-to-one mapping of S on itself: $x \leftrightarrow x\alpha$ ($x, x\alpha \in S$) such that $(x\alpha)\beta = x(\alpha\beta)$ ($x \in S; \alpha, \beta \in G$). S -group G is called S, Γ, μ -group if (I) $M \in \Gamma$ implies $M\alpha \in \Gamma$ for every $\alpha \in G$ and (II) $\mu(M) = 0$ implies $\mu(M\alpha) = 0$ for every $\alpha \in G$. S, Γ, μ -group is said free provided that if α is not the unit of G then $x\alpha = x$ holds for an x -set of μ -measure zero. G is said ergodic provided that if $M \in \Gamma$ is such that for every $\alpha \in G$ the difference of the sets $M, M\alpha$ has μ -measure 0, then either $\mu(M) = 0$ or $\mu(S - M) = 0$. Let G be free and ergodic S, Γ, μ -group and $\mathfrak{H}_S^G = \mathfrak{H}_{S, \Gamma, \mu}^G$ be the set of all complex-valued functions $F(x, \alpha)$ ($x \in S, \alpha \in G$) which are Γ -measurable in x for every $\alpha \in G$ and with a finite $\sum_{\alpha \in G} \int_S |F(x, \alpha)|^2 d_{\mu} x$. If the inner product $(F, G)_S^G$ is defined by $\sum_{\alpha \in G} \int_S F(x, \alpha) \overline{G(x, \alpha)} d_{\mu} x$, \mathfrak{H}_S^G is a finite dimensional Euclidean or a Hilbert space. Define the bounded operators in $\mathfrak{H}_S^G : U_{\beta} F(x, \alpha)$

$= \left[\frac{d\mu_\beta}{d\mu}(x) \right]^{1/2} F(x\beta, \alpha\beta)$ for any $\beta \in G$ and $L_{\varphi(x)}F(x, \alpha) = \varphi(x)F(x, \alpha)$ for any bounded and Γ -measurable $\varphi(x)$ which is defined for all $x \in S$. Then M which is the ring generated by all U_β and $L_{\varphi(x)}$, is a factor. In Chapter IV, the main theorem is proved by above tools. An S, Γ, μ -group G is called measurable if there exists a Γ -measure ν such that (I) $\mu(M) = 0$ is equivalent to $\nu(M) = 0$ and (II) $\nu(M) = \nu(M\alpha)$ always. If G is measurable, then the above defined M belongs to the class (I) or (II). Otherwise M belongs to the class (III_∞) . This fact proves existence of the class (III_∞) . In particular, let S be the set of all real numbers, Γ the system of all Borel sets in S (in the usual sense), and μ the common Lebesgue measure and G be the group of one-to-one mapping: $x \mapsto \varrho x + \sigma$ ($\varrho > 0$, ϱ, σ rational). Clearly G is free and ergodic but not measurable. This gives a simple example of the class (III_∞) . *Izumi.*

Nakano, Hidegorô: Funktionen mehrerer hypermaximaler normaler Operatoren. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 713—728 (1939).

Let N_1, N_2, \dots be hypermaximal normal operators in general euclidean space H , and let $E(Z_1), E(Z_2), \dots$ be the corresponding resolutions of the identity, each defined on the complex planes S_1, S_2, \dots . We assume that N_i are mutually commutative.

On the direct product $\prod_{i=1}^{\infty} S_i$, the measurability (with respect to $E(Z_1), E(Z_2), \dots$) and the measurable functions are defined, as in Lebesgue's theory of measure. Then the notion of function $F(N_1, N_2, \dots)$ is introduced, and the criterion for a hypermaximal normal operator to be such a function is obtained. The results are an extension of J. von Neumann's classical ones. For the proof, the author introduces the notions of B -, L - and U -rings of mutually commutative projections. These interesting rings are proved to be coincident if H is separable. *Kôsaku Yosida (Osaka).*

Nakano, Hidegorô: Hypermaximalität normaler Operatoren. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 22, 259—264 (1940).

Ergänzungen zu einer früheren Arbeit [vgl. Proc. phys.-math. Soc. Jap. 21, 315 bis 339 (1939); dies. Zbl. 21, 234], vor allem wird bewiesen, daß die vom Verf. definierten hypermaximalen normalen Operatoren auch im nichthermitischen Fall mit den von J. von Neumann erklärten [Math. Ann. 102, 370—427 (1929)] normalen Operatoren identisch sind. *G. Köthe (Münster i. W.).*

Rellich, Franz: Störungstheorie der Spektralzerlegung. 4. Mitt. Math. Ann. 117, 356—382 (1940).

Es werden genaue Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung der Operatoren abgeleitet. $A(\varepsilon)$ sei ein regulärer selbstadjungierter Operator (im Sinne der 3. Mitteilung, vgl. dies. Zbl. 20, 306). Besitzt der ungestörte Operator $A(0)$ einen einfachen Eigenwert λ_0 , so wird aus dem Ansatz $(A_0 + \varepsilon A_1 + \dots)(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots) = (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots)(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots)$ eine Abschätzung über die Konvergenz der Entwicklung der Eigenwerte und der Eigenelemente gewonnen. Ähnliche Abschätzungen ergeben sich auch im Falle eines mehrfachen ungestörten Eigenwertes λ_0 mit einfacher erster Näherung λ_1 . Für die genauen Voraussetzungen muß auf die Arbeit verwiesen werden. § 4 enthält ein für die Anwendungen besonders wichtiges Kriterium für die Regularität eines Operators $A(\varepsilon)$, das auf das Verhalten der quadratischen Form $(A(\varepsilon)u, v)$ zurückgreift. Sind die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt, so lassen sich wieder genaue Aussagen über die Konvergenz der Entwicklungen der Eigenwerte und Eigenelemente machen. § 6 bringt Beispiele, die die unmittelbare Anwendbarkeit der Kriterien auf Differentialoperatoren beleuchten. So ergibt sich z. B., daß für alle Eigenwerte und Eigenelemente $\lambda^{(\nu)}(\varepsilon)$, $\varphi^{(\nu)}(\varepsilon)$ des Sturm-Liouville'schen Problems $-(p(x)u')' + q(x)u + \varepsilon s(x)u(x) = \lambda u(x)$ [$u(0) = u(l) = 0$] ein fester Konvergenzkreis für ihre Entwicklung nach ε existiert. Im Beispiel $-(p(x)u')' + q(x)u + \varepsilon \frac{s(x)}{x^2}u = \lambda u$ [$u(0) = u(l) = 0$] müssen die zugehörigen qua-

dratischen Formen herangezogen werden, es ergibt sich damit sogar eine gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \dots$ im Intervall $[0, l]$. Schließlich wird gezeigt, daß die abgeleiteten Sätze auch explizite Abschätzungen für die Entwicklung der Eigenfunktionen des kleinsten Eigenwertes $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ und der zugehörigen Eigenfunktion $\varphi^1(\varepsilon)$ der Schrödingergleichung $-\Delta u - \frac{c}{u} + \varepsilon s(x, y, z)u = \lambda u$ ergeben.

G. Köthe (Münster i. W.).

Variationsrechnung:

Sibagaki, Wasao: Critical points of a real function of n independent variables on a hypersurface defined by m ($< n$) equations in these variables. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 535—587 (1939).

Im Hinblick auf die Fragestellung der Variationsrechnung [vgl. Bliss, Normality and Abnormality in the Calculus of Variations, Trans. Amer. Math. Soc. 43, 365—376 (1938); dies. Zbl. 19, 123] studiert Verf. sehr eingehend das einfachere Problem des relativen Minimums einer gewöhnlichen zunächst nur schwach differenzierbaren Funktion $L(x^i)$ ($i = 1, \dots, n$) unter Nebenbedingungen $\varphi_\alpha(x^i) = 0$, $\alpha = 1, \dots, m < n$, genauer das Problem der kritischen Punkte von L auf der durch die Bedingungengleichungen definierten Hyperfläche \mathfrak{F} . Nachdem im I. Teil die regulären und singulären Punkte von \mathfrak{F} untersucht und klassifiziert sind, werden im II. Teil die abnormalen kritischen Punkte (einer gewissen Abnormalitätsordnung q) mit in Betracht gezogen. Zu ihrer Klassifikation dient die „zweite Variation“. Diese wird im III. Teil mit Hilfe der zu L gehörigen Hamiltonfunktion H behandelt. E. Hölder (Braunschweig).

Tricomi, Francesco: Determinazione delle estremali di un certo integrale. Atti Accad. Sci. Torino 75, 97—100 (1939).

In der Wurfbahnlehre kommt die Aufgabe vor, die Extremalen des Integrals

$$J = \int_0^\omega y p \left(\frac{p^2}{1 + p^2} - \sin^2 \alpha \right)^3 dx \quad \left(p = \frac{dy}{dx} \right)$$

zu bestimmen, wo ω fest und α ein gegebener Winkel ist. Verf. löst sie mit Hilfe der Eulerschen Differentialgleichungen und findet

$$y = \frac{k}{p^2 [p^2 - (1 + p^2) \sin^2 \alpha]^2}, \quad x = \frac{y}{p} + \int \frac{y}{p^2} dp + a;$$

a und k sind die Festwerte der Integration.

Koschmieder (Graz).

Mammana, Gabriele: La variazione seconda generalizzata nel caso dei punti terminali mobili e problemi sugli autovalori connessi. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 19, 81—106 (1940).

Il s'agit du problème de minimiser l'intégrale

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} (a y'^2 + 2 b y y' + c y^2 + p y' + q y + \delta) dx,$$

lorsqu'on considère l'ensemble des courbes de la classe C' , définies dans un même intervalle (x_1, x_2) . L'A. donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du minimum, et un théorème d'existence des autovaleurs de l'équation différentielle relative au problème en question.

S. Cinquini (Pavia).

Hölder, Ernst: Reihenentwicklungen aus der Theorie der zweiten Variation. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 13, 273—283 (1940).

Hamburger Vortrag, in dem verkürzt und mit etwas anderer Methode die Ergebnisse zweier größerer Arbeiten des Verf. [Prace mat. fiz. 43, 307 (1935); dies. Zbl. 13, 67. Acta math. 70, 193 (1939); dies. Zbl. 20, 134] dargestellt werden. Es handelt sich um Eigenwertprobleme, die durch Erweiterung der Jacobischen Variationsgleichungen eines Lagrangeproblems mit einem Parameter entstehen. Man bekommt Eigenwertkriterien, welche die Bedingungen über konjugierte Punkte usw. ersetzen.

Boerner (München).

Baiada, Emilio: Sopra un problema di Mayer. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 109—141 (1940).

Il s'agit du problème de Mayer isopérimétrique en forme paramétrique. Soient $F(x, y, x', y', u)$, $G(x, y, x', y', u, v)$ deux fonctions finies et continues avec leurs dérivées partielles du premier ordre et positivement homogènes de degré 1 en x', y' , et soit $C: x = x(s), y = y(s)$, ($0 \leq s \leq L$) une courbe continue et rectifiable. Soit $U_{c,\alpha}(s)$ une solution de l'équation différentielle $u'(s) = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u(s))$, qui satisfait à la condition $u(0) = \alpha$, et soit $V_{c,\alpha,\beta}(s)$ une solution de l'équation $v'(s) = G(x(s), y(s), x'(s), y'(s), U_{c,\alpha}(s), v(s))$, qui vérifie la condition $v(0) = \beta$. — Après cela on considère une classe K de courbes C , et trois nombres fixes α, β et \bar{u} : le problème en question a pour objet la recherche, entre les courbes de K pour lesquelles est $U_{c,\alpha}(L) = \bar{u}$, du minimum du fonctionnel $V_{c,\alpha,\beta}(L)$. — Dans ce remarquable Mémoire, qui réalise une charmante application de la méthode de Tonelli à un nouvel et important chapitre du Calcul des Variations, l'A. donne des théorèmes d'existence du minimum et établit les équations des extrémales. *S. Cinquini (Pavia).*

Douglas, Jesse: Solution of the inverse problem of the calculus of variations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 631—637 (1939).

Das „inverse Problem“ der Variationsrechnung besteht bekanntlich in der Entscheidung, ob ein gegebenes System $y_i' = F_i(x, y_j, y_j')$ ($i, j = 1, \dots, n$) von ∞^{2n} Kurven im $(n+1)$ -dimensionalen Raum (x, y_j) aus den Extremalen eines Variationsproblems $\int \varphi(x, y_j, y_j') dx = \min$ besteht bzw. in der Bestimmung aller Funktionen φ . Dieses Problem wurde nun vom Verf. allgemein gelöst, und die vorliegende Arbeit enthält eine kurze Beschreibung der angewandten Methode und der Resultate. Eine ausführliche Beschreibung dürfte demnächst in den Ann. of Math. erscheinen. Wir beschränken uns deshalb auf die Hervorhebung des Resultates, daß jedes System von Extremalen gewissen notwendigen Bedingungen genügt. Beispiele von nichtextremalen Systemen sind z. B. die folgenden: $y'' = y^2 + z^2$, $z'' = y$; $y'' = y^2 + z^2$, $z'' = 0$. *O. Borůvka (Brünn).*

Manià †, Basilio: Sopra una questione di compatibilità nel metodo variazionale. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 79—95 (1940).

Dans le § 1 il est question des intégrales du Calcul des Variations

$$\int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y_1, \dots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_m}{dx}, \dots, \frac{d^n y_1}{dx^n}, \dots, \frac{d^n y_m}{dx^n}\right) dx,$$

où la fonction f a une forme analytique particulière, et, avec la méthode bien connue de Tonelli, l'A. démontre, pour $m = 1, 2$; $n = 1, 2$, des théorèmes d'existence du minimum: il faut remarquer que la particularité de l'expression de f a permis à l'A. de faire usage de considérations géométriques élémentaires pour simplifier quelques points des procédés déjà suivis par des autres auteurs. — La partie plus intéressante du Mémoire c'est le § 2, où l'A. fait application des résultats du § 1 au „metodo variazionale“ de Picone pour la résolution des équations aux dérivées partielles. *S. Cinquini (Pavia).*

Shiffman, Max: The Plateau problem for minimal surfaces of arbitrary topological structure. Amer. J. Math. 61, 853—882 (1939).

Das allgemeine Plateausche Problem der Bestimmung einer Minimalfläche vorgegebener topologischer Struktur wird vom Verf. im Anschluß an die Arbeiten von Courant [insbesondere Ann. of Math. 38, 679—724 (1937)] im einzelnen durchgeführt, und zwar ohne Gebrauch der Sätze der konformen Abbildung (was für die Aufstellung von Normalformen der Riemannschen Flächen von Interesse ist). Verf. kann dabei bezüglich der Grenzen solche Ungleichheiten stellen, daß auch gewisse Typen relativer Minima eingeschlossen sind. Dazu kommt er durch Benutzung des von ihm schon früher [Ann. of Math. 39, 309—315 (1938); dies. Zbl. 19, 124] eingeführten „inneren Diameters“, eines Maßes dafür, wie weit die Fläche von niederer topologischer Struk-

tur ist. Beim verallgemeinerten Dirichletschen Funktional werden nun lediglich solche Flächen zugelassen, deren innerer Diameter zwischen positiven Grenzen $\alpha < \beta$ liegt, und es wird verlangt, daß die untere Grenze des Funktional für diese Flächen kleiner ist als die untere Grenze bei Zulassung nur der Flächen, deren innerer Diameter genau α oder β ist. Dann hat das Variationsproblem eine Lösung: die gesuchte Minimalfläche.

E. Hölder (Braunschweig).

Gillis, Paul: Sur les équations de Haar du calcul des variations. *Mathesis* 53, 173—181 (1939).

Bei Aufgaben der Form $\delta \iint F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy = 0$ hat Haar gezeigt [J. reine angew. Math. 49, 1 (1919)], daß man die Extremalen nicht wie in den Eulerschen Differentialgleichungen (E. D.) von der Klasse C^2 anzunehmen braucht: er gab Gleichungen für Extremalen der Klasse C^1 an. Im Anschluß an eine frühere, den Ansatz Haars auf allgemeinere Variationsaufgaben übertragende Arbeit (dies. Zbl. 16, 261) gewinnt Verf., die Einzelheiten durchrechnend, dessen Seitenstück bei Aufgaben der Gestalt

$$\delta \iint F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) dx dy = 0;$$

es gilt für Extremalen der Klasse C^2 , nicht wie die E. D. nur für solche der Klasse C^4 .

Koschmieder (Graz).

Goldstine, Herman H.: Minimum problems in the functional calculus. *Bull. Amer. Math. Soc.* 46, 142—149 (1940).

Funktionentheorie:

Privalov, I., and G. Brodsky: On the limit values of a Cauchy-Stieltjes integral. *Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk* 2, 43—51 u. engl. Zusammenfassung 51—52 (1938) [Russisch].

Les auteurs considèrent l'intégrale (1) $F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x d\psi(\theta)}{x - z}$, où $x = e^{i\theta}$, $z \neq x$,

$|z| \neq 1$, $\psi(\theta) = \psi_1(\theta) + i\psi_2(\theta)$, $\psi_1(\theta)$ et $\psi_2(\theta)$ étant de variation bornée dans $[0, 2\pi]$.

Pour $x_0 = e^{i\theta_0}$ sous (1) on comprend $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\theta_0 - \varepsilon} \frac{x d\psi(\theta)}{x - x_0} + \int_{\theta_0 + \varepsilon}^{2\pi} \frac{x d\psi(\theta)}{x - x_0} \right)$, si cette limite

existe. Si le point z tend vers le point x_0 suivant un chemin arbitraire non tangent à la circonférence $C(|z|=1)$ ils démontrent qu'on a presque partout pour θ_0 , $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$,

$\lim F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x d\psi(\theta)}{x - x_0} \pm \frac{1}{2} \psi'(\theta_0)$. Le signe $+$ est valable dans le cas où z est à

l'intérieur de C et le signe $-$ pour z en dehors de C . *N. Obrechhoff (Sofia).*

Beckenbach, E. F.: Space analogs of function-theoretic results. *Amer. Math. Monthly* 47, 199—212 (1940).

Verf. gibt eine Reihe von Sätzen an, die gewisse funktionentheoretische Sätze, die teilweise geometrischer Natur (z. B. Blochs Satz, Verzerrungssätze usw.) sind, teilweise wichtige funktionentheoretische Prinzipien enthalten (z. B. Konvergenzsätze von Lindelöf, Prinzip vom Maximum, Liouvilles Satz usw.), auf gewisse Flächenklassen im Raume, vor allem auf Minimalflächen, erweitern. *Rolf Nevanlinna.*

Pompeiu, D.: Du point à l'infini comme point singulier isolé. *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest* 10, 13—19 (1939).

$F(z)$ sei eine eindeutige Funktion, welche sich in der Umgebung des unendlichfernen Punktes regulär verhält und dort von mindestens zweiter Ordnung verschwindet. In der endlichen Ebene besitze $F(z)$ nur isolierte Singularitäten. Ist C eine geschlossene rektifizierbare Jordankurve, auf welcher keine Singularitäten von $F(z)$ liegen, so erhält man für das Integral $\int_C F(z) dz^*$, gleichgültig ob man es über das Innere oder Äußere von C erstreckt, den gleichen

Wert. Hierbei bekommt man den Wert von $(*)$ erstreckt über das Innere von C , wenn man $(*)$ als Kurvenintegral bei im positiven Sinne durchlaufenen C berechnet. Dieses Integral ist gleich

der Summe der Residuen der in C gelegenen Singularitäten. Mit dem Verf. soll dann unter dem Integral (*) erstreckt über das Äußere von C die negative Summe der Residuen der außerhalb C gelegenen Singularitäten verstanden werden. Besitzt allgemeiner $F(z)$ im unendlichfernen Punkt einen isolierten Pol und enthält die Kurve C in ihrem Äußeren mindestens eine singuläre Stelle, so wird das Integral (*) über das Innere von C z. B. gleich $\int_C [F_1(z) - P_1(z)]/(z-b) dz$

erstreckt über das Äußere von C , wenn $P_1(z)$ der Hauptteil von $F_1(z) = F(z)/(z-b)$ des im Unendlichen gelegenen Poles ist. An Beispielen wird dargetan, daß diese Sätze bei Auswertung von Kurvenintegralen im Komplexen zur Kontrolle und manchmal auch zur Vereinfachung der Rechenarbeit dienen können. Insbesondere betrachtet Verf. noch das von Painlevé (F. Tisserand, Recueil d'exercices. 2. Aufl. S. 470) behandelte Integral

$$\int_C z^{3/2} / [(1+z^2)\sqrt{1-z^2}] dz,$$

welches über das Innere von C zu erstrecken ist, wobei C das Segment $(-1, +1)$ im Innern und die beiden Stellen $+i, -i$ im Äußeren enthält und zeigt daß es gleich dem Integral $\int_C [z^{3/2}/\sqrt{1-z^2} - P(z)] \frac{dz}{1+z^2}$ über das Äußere von C ist, worin $P(z)$ den Hauptteil von $z^{3/2}/\sqrt{1-z^2}$ in bezug auf den Punkt ∞ bedeutet. Diese Form des Integrals bringt die von Painlevé gefundenen Ergebnisse zum Ausdruck. *Lammel (Prag).*

Calugaréano, Georges: Sur la suite des diamètres successifs d'un ensemble plan. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 409—411 (1939).

Nach M. Fekete [Math. Z. **17**, 228—249 (1923)] ordnet man einer beschränkten und abgeschlossenen unendlichen Punktmenge E der komplexen Ebene die (nicht zunehmende) Folge der Durchmesser d_n zu durch die Festsetzung

$$d_n^{(n-1)} = \text{Max}_{(E)} |V(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2,$$

wo V die Vandermondesche Determinante der Punkte x_1, x_2, \dots, x_n aus E bedeutet. Den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$ bezeichnet man als den transfiniten Durchmesser von E .

In Erweiterung dieser Definition schlägt Verf. in der vorliegenden Note vor, einer Punktmenge E der genannten Art eine Doppelfolge d_{np} von „Durchmessern“ zuzuordnen durch die Festsetzung

$$d_{np}^{n(n-1) \dots (n-p)} = \text{Max}_{(E)} |v_{np}(x_1, x_2, \dots, x_n)| \quad \text{mit} \quad v_{np}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod \Delta_p x,$$

wo $\prod \Delta_p x$ das Produkt der auf alle möglichen Arten mit $p+1$ verschiedenen Punkten der Serie x_1, x_2, \dots, x_n aus E gebildeten Differenzen $\Delta_p x$ bedeutet. Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{np} = \delta_p$ der (nicht zunehmenden) einfachen Teilfolge der zu beliebigem, festem p gehörigen d_{np} soll der „transfinite Durchmesser p . Ordnung“ von E heißen. — Verf. wirft einige Fragen bezüglich der Eigenschaften dieser Durchmesser auf. Er gibt ferner für die Durchmesser d_{np} der Singularitätenmenge einer eindeutigen, im Unendlichen regulären analytischen Funktion $f(z)$ untere Schranken an, die gewisse „Fortsetzungs-invarianten“ von $f(z)$ (vgl. G. Calugaréano, dies. Zbl. **19**, 418 und **20**, 395) enthalten.

F. Lösch (Rostock).

Bohr, Harald: Zum Picardschen Satz. Mat. Tidsskr. B **1940**, 1—6.

Aus dem Schottky-Landauschen Satze wird eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes gefolgert: Jede in der Umgebung $R < |z| < \infty$, $-\infty < \arg z < +\infty$ des logarithmischen Windungspunktes $z = \infty$ reguläranalytische Funktion $f(z)$, welche daselbst die Werte a und b ausläßt und für $|z| = \varrho (> R)$ beschränkt ($|f| < k$) bleibt, genügt für $|z| \geq \varrho$ der Ungleichung $|f(z)| < |z|^{K(a,b,R,\varrho,k)}$. *G. af Hällström (Åbo).*

Lavrentieff, M., und D. Kwesselawa: Über einen Ostrowskischen Satz. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR **1**, 171—174 u. deutsch. Text 172—174 (1940) [Russisch].

Die Ostrowskische Abschätzung für die Abweichung derjenigen Funktion $f(z) = z + \dots$, welche ein nahezu kreisförmiges Gebiet (Rand in $\frac{1}{2} < \vartheta \leq |z| < 1$) in den Kreis überführt, von der linearen Funktion z kann auf Grund von Ergebnissen der letzten

Jahre verbessert werden. Es gilt

$$|f(z) - z| \leq -K(1 - \vartheta) \log(1 - \vartheta) \quad \text{für} \quad |z| \leq \vartheta$$

und

$$|f(z) - z| \leq -K_1(1 - \vartheta) \log(1 - \vartheta_1) \quad \text{für} \quad |z| \leq \vartheta_1, \vartheta < \vartheta_1$$

mit passenden Konstanten K oder K_1 .

Ullrich (Gießen).

Kamenetzky, I. M.: Sur l'indicatrice de croissance d'une fonction entière du premier ordre et sur la distribution des singularités d'une fonction représentée par la série de Taylor associée. 2. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 321—323 (1940).

Verf. beweist für eine spezielle Klasse von Strahltypen $h(\varphi)$, daß letztere durch die Funktion

$$A(\lambda, \alpha) = \max_{\varphi} (h(\varphi) + \lambda \cos(\varphi + \alpha))$$

eindeutig bestimmt sind. Damit gewinnt Verf. im Anschluß an eine frühere Mitteilung [Kamenetzky, C. R. Acad. Sci. URSS Nr 26, 552—555 (1940)] und als Erweiterung

der dortigen Resultate unter anderem: Eine ganze Funktion $G(z) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ vom

Exponentialtypus besitzt dann und nur dann einen gegebenen Strahltypus $h(\varphi)$ der betrachteten Klasse, wenn für alle $t = \lambda e^{i\alpha}$ gilt

$$A(\lambda, \alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \sum_0^n \binom{n}{k} t^{n-k} a_k \right|}.$$

Ref. bemerkt, daß die Resultate nicht nur für jene spezielle Klasse, sondern für alle Strahltypen gültig sind und sich einfacher beweisen lassen. Pfuger (Fribourg).

Wright, E. M.: The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 238, 423—451 (1940).

Die Arbeit enthält wesentliche neue Beiträge zur asymptotischen Behandlung von recht ausgedehnten Klassen ganzer Transzendenten: aus asymptotischen Eigenschaften der Taylorkoeffizienten wird auf das asymptotische Verhalten der Funktion geschlossen, doch so, daß gerade auf die Erfassung der Grenzgebiete zwischen den Gültigkeitsgebieten der nach früheren Methoden bekannten Entwicklungen das Hauptaugenmerk gerichtet ist (barrier regions); darin liegen die Fortschritte. — Die Methode ruht vielfach auf älteren und wohlbekannten Ansätzen, namentlich von Watson [1912—1913; Rend. Circ. mat. Palermo 34, 1—38 (1912) und Trans. Cambridge Philos. Soc. 22, 15—37 (1913)]; die Gedanken ähneln denen der Methode „of steepest descents“, können aber deren Schwierigkeit meiden und gestatten eine deutliche Vereinfachung in der Berechnung der Ergebnisse, die voraussichtlich noch wichtige Folgerungen bringen wird. — Die Ergebnisse umfassen

so bekannte Funktionenklassen wie Mittag-Lefflers $E_{\alpha}(x)$, Hardys $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu+a)^{\nu} \nu!}$,

zahlreiche Fälle von Untersuchungen von Barnes, Fox und Verf. (im Bereich der hypergometrischen Funktion und ihrer Verallgemeinerungen), gestatten aber freiere Beweglichkeit der Parameter (so z. B. komplexe α bei $E_{\alpha}(z)$). — Der Wortlaut der Hauptergebnisse ist in neun Theoreme straff gefaßt, deren Wiedergabe indes den Rahmen des Referats überschritte. Der Kern der Aussagen liegt in der genauen Erfassung der „Überlagerung“ asymptotischer Entwicklungen in den Grenzgebieten (s. oben). — Die Annahmen über die Taylorkoeffizienten sind folgende: In $\sum c_{\nu} z^{\nu}$ sei

$$c_{\nu} = \frac{\Phi(\nu)}{\Gamma(\kappa\nu + \beta)}; \quad (\Re \kappa > 0)$$

$\Phi(t)$ wird durch die folgende Beschreibung erfaßt: Für ein gewisses M und passende

Konstanten A_1, A_2, \dots, A_M ; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M+1}$ gelte

und $\Re(\alpha_1) \geq \Re(\alpha_2) \geq \dots \geq \Re(\alpha_M) > \Re(\alpha_{M+1})$

$$\frac{\Phi(t)}{\Gamma(\kappa t + \beta)} = \sum_{\mu=1}^M \frac{\kappa A_\mu}{\Gamma(\kappa t + \alpha_\mu)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\kappa t + \alpha_{M+1})}\right).$$

Das umfaßt weitaus den gewöhnlicheren Fall asymptotischer Entwicklung nach negativen Potenzen bzw. komplexer Potenzen mit abnehmendem Realteil. Die Arbeit enthält nur den Übergang von der Asymptotik der Koeffizienten zu der der Funktion. Eine Reihe von Anwendungen ist in Aussicht gestellt. *Ulrich* (Gießen).

Wright, E. M.: The generalized Bessel function of order greater than one. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 11*, 36—48 (1940).

Asymptotische Behandlung der Funktion

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\varrho\nu+\beta)}.$$

Für positive reelle ϱ hat Verf. diese Funktion schon früher untersucht [*Proc. London Math. Soc.* (2) **38**, 257—270 (1934); dies. Zbl. **10**, 211]; für $\varrho > 0$ genügen dazu u. a. auch die allgemeinen Methoden der vorstehend besprochenen Untersuchung; für $\varrho < 1$ ist dies nicht mehr durchweg der Fall, für $-1 < \varrho < 0$ sind die Voraussetzungen der allgemeinen Theoreme gar nicht mehr erfüllt. Verf. behandelt darum die Funktion mit direkten Methoden (teils steepest descents, teils Zerlegung in Summanden, für welche die vorstehende Untersuchung brauchbar wird); er gewinnt Aussagen über die Lage der Nullstellen: für $-1 < \varrho < -\frac{1}{3}$ liegen sie um $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}(3\varrho + 1)$, für $-\frac{1}{3} \leq \varrho < 0$ um die positiv reelle Achse, für $\varrho > 0$ um die negativ reelle Achse. Das asymptotische Verhalten für $-1 < \varrho < 0$ ist exponentiell: klein in einem Sektor, groß in zwei Nachbarsektoren und für $-1 < \varrho < -\frac{1}{3}$ algebraisch in einem vierten Sektor. *Ulrich* (Gießen).

Lammel, Ernst: Über Approximation im Einheitskreise regulärer Funktionen eines komplexen Argumentes. *Mh. Math. Phys.* **49**, 199—208 (1940).

$\{a_\mu\}$ bzw. $\{b_\mu\}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) sei eine Folge von (im Endlichen gelegenen) Punkten des Bereichs $|z| \leq \varrho < 1$ bzw. $|z| \geq 1$. Jeder in $|z| < 1$ regulären Funktion $f(z)$

lassen sich die rationalen Funktionen $s_n(z) = C_0 + \sum_{\nu=1}^n C_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_\mu}{z - b_\mu}$ ($n = 1, 2, \dots$)

eindeutig so zuordnen, daß $s_n(a_\mu) = f(a_\mu)$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$); falls a_λ unter den Stellen a_1, \dots, a_n κ -mal ($\kappa > 1$) vorkommt, so soll außerdem $s'_n(a_\lambda) = f'(a_\lambda), \dots, s_n^{(\kappa-1)}(a_\lambda) = f^{(\kappa-1)}(a_\lambda)$ sein. Damit die hierdurch einer jeden für $|z| < 1$ regulären Funktion $f(z)$ zugeordneten Funktionen $s_n(z)$ für jedes z aus $|z| < 1$ gegen $f(z)$ konvergieren, wenn $n \rightarrow \infty$, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \left(\bar{a}_\mu^k - \frac{1}{b_\mu^k} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Das Resultat wird auf einige speziellere Fälle angewandt, welche vom Verf. schon früher behandelt worden sind (dies. Zbl. **15**, 215; **16**, 20; **16**, 362). *V. Paatero*.

Boas jr., R. P.: General expansion theorems. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **26**, 139—143 (1940).

Ohne Beweis teilt Verf. folgenden Satz mit: Sind $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei Folgen von Elementen eines normierten linearen Raumes E [in der Terminologie von S. Banachs

Buch, *Théorie des opérations linéaires*, 1932 (dies. Zbl. 5, 209), nur mit dem Unterschied, daß die reellen linearen Räume durch komplexe lineare Räume ersetzt werden] und gibt es eine solche reelle Zahl λ ($0 < \lambda < 1$), daß für jede Folge $\{a_n\}$ komplexer Zahlen $\left\| \sum_{n=1}^N a_n(x_n - y_n) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \right\|$; $N = 1, 2, \dots$ gilt und ist $\{x_n\}$ eine Fundamentalfolge oder Basis von E , so hat $\{y_n\}$ die gleiche Eigenschaft. — Ist E die Gesamtheit der in $|z| < r$ regulären und auf $|z| \leq r$ stetigen Funktionen $f(z)$ mit der Normierung $\|f\| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^p d\vartheta \right\}^{1/p}$, $p \geq 1$ und nimmt man für $\{x_n\}$ die Folge $\{z^n\}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) und als $\{y_n\}$ eine Folge $\{g_n(z)\}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) von Elementen aus E , so ergibt sich aus voranstehendem Satz eine hinreichende Bedingung, unter welcher sich jede in $|z| < r$ reguläre und auf $|z| \leq r$ stetige Funktion $f(z)$ in eine auf $|z| \leq r' < r$ gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(z)$ entwickeln läßt. Aus diesem Satze folgt u. a. ein Theorem über die Entwickelbarkeit einer regulären Funktion $f(z)$ in eine Reihe von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n [1 + h_n(z)]$ mit $h_n(0) = 0$ und $h_n(z)$ regulär, welches das Ergebnis von Takenaka (vgl. dies. Zbl. 2, 196) über Reihen vom gleichen Typus umfaßt.

Lammel (Prag).

Ghermanescu, Michel: Une inégalité pour les algébroides. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 10, 31—33 (1939).

Diskussionsbemerkung und Vermutung zu Ungleichungen, die (im Umkreis des II. Hauptsatzes) von H. Cartan und G. Valiron behandelt worden waren und sich auf Linearkombinationen bzw. Algebroiden beziehen.

Ullrich (Gießen).

Sona, Luigi: Rappresentazione conforme di un piano con n tagli radiali su un piano forato circolarmente. Comment. Pontif. Acad. Sci. 3, 39—64 (1939).

Die vom Ursprung aus mit n geradlinigen Schlitten beliebiger Länge versehene Ebene wird in den Einheitskreis abgebildet. Die Beziehungen zur Konstantenbestimmung werden angegeben und mehrere Sonderfälle ins einzelne behandelt.

Ullrich.

Dinghas, Alexander: Über positive harmonische Funktionen in einem Halbraum. Math. Z. 46, 559—570 (1940).

Die Methode von Tsuji (vgl. dies. Zbl. 23, 54) läßt sich dazu benutzen, um die Julia-Wolf-Carathéodoryschen Sätze von $n = 2$ auf harmonische Funktionen in Halbräumen der Dimension $n = 2$ zu übertragen; das gilt auch für die von Tsuji gegebenen Zusätze. Verf. zeigt, daß jetzt $m(r)r^{n-1}$ konkav in r^n ist, u. a. m.

Ullrich.

Beurling, Arne: Ensembles exceptionnels. Acta math. 72, 1—13 (1940).

Unter der Ausnahmepunktmenge E_f einer summierbaren Funktion f versteht

Verf. die Menge, wo der endliche Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x) dx$ für $h \rightarrow 0$ nicht existiert.

Nach Lebesgue ist E_f eine Nullmenge. Verf. stellt die Aufgabe, die Menge E_f genauer zu charakterisieren, falls der Funktion f gewisse engere Bedingungen auferlegt werden. Eine wichtige Funktionsklasse (Klasse S) ist diejenige, für welche das Integral

$$S(f) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{|f(\theta+t) - f(\theta-t)|^2}{t^2} d\theta dt$$

endlich ist. Für diese Funktionen gilt der interessante Satz (Théorème I), daß E_f , welche mit der Menge zusammenfällt, wo die entsprechende Fouriersche Reihe divergiert, die äußere logarithmische Kapazität Null hat. Der scharfsinnige Beweis beruht auf zwei Hilfssätzen, die auch an sich von Interesse sind. Der erste besagt, daß, falls

$$f(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad f(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

($0 \leq r \leq 1$) und f zur Klasse S gehört, dasselbe für die „starke Majorante“ F von f gilt, welche als die totale Variation von $f(r, \theta)$ auf dem Radius $(0, e^{i\theta})$ erklärt ist; ein Begriff, den der Verf. schon früher eingeführt hat (dies. Zbl. 13, 63). Der zweite Hilfssatz gibt für die Kapazität $C(E)$ einer Punktmenge E auf $|z| = 1$, wo eine Funktion f ($S(f) = 1$, $a_0 = 0$) größer oder gleich ϱ ist, die obere Schranke $C(E) \leq e^{-\varrho^2}$. Als Anwendung dieses Hilfssatzes wird ein Extremalproblem aus der Theorie des harmonischen Maßes gelöst, welches zu einem neuen Beweis des Satzes von Denjoy-Carleman-Ahlfors über die Höchstzahl der asymptotischen Werte einer ganzen Funktion endlicher Ordnung führt. Mit Hilfe seines Théorème I beweist Verf. folgende interessante Verschärfung des Fatouschen Satzes: Wenn eine im Einheitskreis meromorphe Funktion diesen Kreis auf eine Riemannsche Fläche von endlichem Flächeninhalt abbildet, so hat die Funktion auf der Peripherie des Einheitskreises wohlbestimmte radiale Grenzwerte, außer höchstens für eine Punktmenge von der äußeren Kapazität Null.

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Popoff, Kyrille: Sur une extension de la notion de dérivée. Fonctions de variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 472—474 (1939).

Popoff, Kyrille: Nouvelle extension de la notion de dérivée. Fonctions de variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 668—670 (1939).

In früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 18, 300 und 19, 56) hat Verf. Verallgemeinerungen des Begriffes der Ableitung bei reellen Funktionen gegeben. Die beiden vorliegenden Noten enthalten analoge Betrachtungen über Funktionen eines komplexen Argumentes. Es sei $Z = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ eine solche Funktion und $Z - Z_0 = (M + iN)(z - z_0)$ die Gleichung einer der Geraden, welche durch den Punkt $Z_0 = f(z_0)$ der Kurve $Z = f(z)$ gehen. Analog der Formel, welche die Entfernung eines Punktes von einer reellen Geraden angibt, bilde man den Ausdruck $D = [(z - z_0)(M + iN) - (Z - Z_0)]/\sqrt{1 + M^2 + N^2}$ und erstrecke das Doppelintegral $S = \int_R |D|^2 d\sigma$ über einen Bereich R , welcher den Punkt z_0 als inneren Punkt

enthält. Fragt man nach reellen Wertepaaren (M, N) , für welche S einen Extremwert annehmen kann, so erhält man deren zwei (M_1, N_1) , (M_2, N_2) , und es ist $(M_1 + iN_1) \cdot (M_2 - iN_2) = -1$. Existiert nun unabhängig davon, wie sich der Bereich R auf den Punkt z_0 zusammenzieht, der Grenzwert $\lim_{R \rightarrow z_0} (M_1 + iN_1)(1)$, so soll darunter der

Wert der Ableitung von $f(z)$ an der Stelle z_0 verstanden werden. Wenn $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ (2) gilt, so ist der Limes (1) gleich $\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$ (3). Andererseits kann aber

der Grenzwert (1) auch dann noch vorhanden sein, wenn $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ unstetig auf einer überall dichten Punktmenge vom Maße Null sind, wie es bei den von Borel (Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. Paris 1917) betrachteten Funktionen der Fall ist. Existiert die so definierte Ableitung (1), dann ist sie eine stetige Funktion von z . — Zu einer anderen Verallgemeinerung der Ableitung von $f(z)$ gelangt man, wenn man das Doppelintegral $D_1 = \int_R D d\sigma$ heranzieht,

dasjenige Wertepaar (M, N) bestimmt, welches D_1 zum Verschwinden bringt und $\lim_{R \rightarrow z_0} (M + iN)$ (4) bildet. Wieder ist (4) gleich (3), wenn $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ (2) befriedigen. Der Grenzwert (4) kann aber selbst dann noch vorhanden sein, wenn $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ unstetige Funktionen sind. Die durch (4) definierte Ableitung und die Ableitung im Sinne von Cauchy haben Eigenschaften, die in ihrer Mehrzahl gemeinsam sind. Wegen analoger Betrachtungen für reelle Funktionen vgl. man insbesondere noch die Abhandlung des Verf., Sur une extension de la notion de dérivée, Mh. Math. Phys. 48, 103—120 (1939); dies. Zbl. 21, 306.

Lammel (Prag).

Spampinato, Nicolò: *Intorno alle funzioni monogene di una classe speciale di variabile ipercomplessa introdotte dal Valerias*. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 348—349 (1940).

Die von Valerias (Circ. Mat. di Buenos Aires 1939) betrachteten monogenen Funktionen einer Variablen über einer gewissen reellen Algebra dritter Ordnung fügen sich in die vom Verf. für eine beliebige mit Einheitsselement versehene reelle oder komplexe Algebra definierten totaldifferenzierbaren Funktionen ein (vgl. dies. Zbl. 12, 101). *E. Martinelli* (Roma).

Behnke, H., und K. Stein: *Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen*. Mitt. math. Ges. Hamburg 8, Tl. 2, 34—81 (1940).

Der Begriff der Konvexität hat in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen eine entscheidende Bedeutung erlangt. Daher haben es die Verff. unternommen, von dieser Seite her in die Theorie einzuführen und einen systematischen Bericht über die hier auftretenden Begriffe der Konvexität zu geben. Zunächst werden die Grundtatsachen über die Konvexität im Sinne der Elementargeometrie zusammengestellt und bewiesen. Neben die bekannten Definitionen der Konvexität eines Bereiches mittels der Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte und (invariant gegen projektive Transformationen) mittels der Stützgeraden wird eine dritte Definition gestellt, die allein für die Übertragung auf die Funktionentheorie m. k. V. in Betracht kommt, da sie nur von den Eigenschaften der inneren Punkte des Bereiches Gebrauch macht: Ein Bereich \mathfrak{B} der projektiv abgeschlossenen Ebene heißt konvex, wenn es zu jedem ganz in ihm liegenden Bereich \mathfrak{B}_0 einen gleichfalls noch ganz in \mathfrak{B} gelegenen Bereich \mathfrak{B}^* gibt, so daß durch alle Punkte aus \mathfrak{B} , die außerhalb \mathfrak{B}^* liegen, Geraden gehen, die nicht in \mathfrak{B}_0 eindringen. Ferner wird als Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ eines Bereiches \mathfrak{B} der kleinste \mathfrak{B} umfassende konvexe Bereich definiert. Beide Definitionen werden auf m -dimensionale Räume ($m \geq 2$) übertragen, indem an Stelle der Geraden $(m-1)$ -dimensionale lineare Räume treten. In dem $2n$ -dimensionalen Raum m. k. V. z_1, z_2, \dots, z_n tritt der einfache Begriff der Planarkonvexität auf, bei dessen Definition statt der Geraden $(2n-2)$ -dimensionale analytische Ebenen gewählt werden. Der Hauptsatz über die Planarkonvexität besagt, daß bei Bereichen mit normalen Randpunkten aus der Voraussetzung analytischer Stützebenen „im kleinen“ die Existenz analytischer Stützebenen „im großen“ folgt. Sodann werden die wichtigsten

Sätze über die Konvergenzbereiche der Potenz- und Laurentreihen $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n w^n z^n$ be-

wiesen. Diese Bereiche sind diejenigen schlichten Reinhardtschen Körper, die konvex in bezug auf die Monome $Cw^\alpha z^\beta$ sind, α, β ganz und ≥ 0 . An dieser Stelle wird bereits der enge Zusammenhang zwischen der Funktionentheorie m. k. V. und den Begriffen der Konvexität sichtbar. Es folgt dann der wichtige Begriff der Regulärkonvexität eines Bereiches, in dessen Definition an Stelle der Geraden analytische Hyperflächen $|f| = 0$ treten, wobei die Funktionen $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ im Bereich regulär und eindeutig sind. Die Eigenschaft eines Bereiches, regulär-konvex zu sein, ist notwendig und hinreichend dafür, daß der Bereich Existenzbereich einer analytischen Funktion ist. Ein Sonderfall der Regulärkonvexität ist die Konvexität der Hartogs-schen Körper in bezug auf die Funktionen $(z_1 - z_1^0)^l \cdot f(z_2, \dots, z_n)$, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß ein solcher Körper Konvergenzbereich der Entwicklung

einer analytischen Funktion nach einer Veränderlichen $\sum_{v=0}^{\infty} (z_1 - z_1^0)^v f(z_2, \dots, z_n)$ ist.

Im Anschluß hieran wird der allgemeine Fall der Entwickelbarkeit der Funktionen eines Bereiches \mathfrak{B} nach den Funktionen einer Familie \mathfrak{F} behandelt und als notwendig und hinreichend hierfür die Konvexität des Bereiches \mathfrak{B} in bezug auf die Funktionen von \mathfrak{F} angegeben. Am Schluß wird noch über die wichtigsten bisher bekannten Eigenschaften des Randes eines Regularitätsbereiches berichtet. *F. Sommer*.